Årg. 30: 4 Dec. 1947

ELEMENTA

Tidskrift för elementär matematik, fysik och kemi

REDAKTION OCH EXP.: Karlbergsv. 16^{IV} STOCKHOLM

FJÄRDE HÄFTET

Sid.

G. Elfving, Matematisk statistik — problem, metoder och tillämpningar 209

G. Starck, Syror och baser II 226

Bokanmälningar: Dubreil, Algèbre; Parke, Guide to the Literature of Mathematics and Physics; Brand, Vector and Tensor Analysis; Michal, Matrix and Tensor Calculus; Valiron, Équations fonctionelles; Nyhlén, Lärobok i geometri, Förberedande kurs i geometri, Tilläggskurs i geometri; Wald, Sequential Analysis; De Forest, Television Now and Onwards; Eddy, Television; Tyler, Telecasting and Color; Mills, Electronics; McNicol, Radio's Conquest of Space; Dunlap, Radar; Hudson, An Introduction to Electronics; Sutton, Demonstration Experiments in Physics; Wessel, Physik; Philipson, Preparativ oorganisk kemi; Guéron, Réactions bimoleculaires I; Flood, Kjemi; Macy, Organic Chemistry Simplified; Fernelius-Garrett-Quill, Fundamentals in Chemistry for the Laboratory; Darmois, L'Activité des solutions électrolytiques 236

Tidskrifter, innehållsöversikt 250, 254

Problemavdelning:

Matematiska uppgifter (red. av S. Bågman) 251

Matematiska och fysikaliska uppgifter i studentexamen h.t. 1947 255

Realexamen h.t. 1947: Provräkning 261

Praktisk realexamen h.t. 1947: Uppgifter i fysik och Uppgifter i beskrivande maskin- och byggnadslära 263

Att observera.

1. Abonnemangspriset är höjt till kr. 10: —. Se meddelande å andra omslagssidan. Rekvirera årg. 1948 redan nu i dec. genom inbetalning å postgiro nr 527 55. Ett portofritt inbetalningskort medföljer detta häfte.
2. Det är tillrådligt att nu — innan luckorna i befintligt lager bli alltför många — komplettera och binda äldre årg. Se upplysningar å andra omslagssidan.
3. »Problemhäfte 1947» har utkommit; priset är oförändrat 80 öre.

ELEMENTA

Redaktionskommitté: professor G. Borelius, adjunkt S. Bågman, förste aktuarien S. Comét, lektor G. Starck, professor J. Tandberg och lektor A. Wahlgren. Redaktör och utgivare: C. E. Blom.

Årligen fyra häften (mars, juni, sept., dec.). Pris pr år 10 kr. pr häfte 3 kr. Subskription sker enklast genom inbetalning av 10 kr. å postgiro nr 527 55, då tidskr. erhålles pr utgivarekorsband. Abonnemang även genom bokhandeln.

Komplettering av äldre årgångar. Vid komplettering vänd Eder direkt till red. med en förfrågan. Luckorna i årg. 1—12 äro många och bli allt fler. Ibland fylles någon lucka av inkommande häften. Meddela därför Edra önskemål. Den som har äldre häften, som kunna undvaras, torde underrätta red. i och för event. byte eller försäljning.

Årgångsserien fr. o. m. årg. 13 är ännu fullständig ehuru ställvis ganska tunn. Priset är för årg. 13—16 kr. 6 och för årg. 17—30 kr. 8 per årg. Även separata häften kunna i viss utsträckning erhållas.

Hittills ha tillhandahållits vissa bundna årg., två årg. i varje bd à 14 kr. och 18 kr. för resp. tidigare och senare årg. Ett litet antal finns ännu kvar. Nytillverkning kommer möjligen att ske längre fram, då pris meddelas.

Pärmar av prima klot i samma utförande som tidigare kunna nu åter erhållas från exp. Priset oförändrat, kr. 1: 75 per st.; varje pärm är avsedd för två årg.: 1—2, 3—4, osv. t. o. m. 29—30.

Problemhäften innehållande uppg. i student- och realex. finnas för åren: 1936 à 60 öre, 1943, 1944, 1945, 1946, 1947 à 80 öre.

Beträffande övriga särtryck hänvisas till tidigare häften av Elementa.

Höjt abonnemangspris.

En höjning av abonnemangspriset från 8 kr. till 10 kr. har visat sig vara ofrånkomlig. Framställningskostnaderna ha oupphörligt stegrats under de senare åren, men tack vare att abonnentantalet successivt ökat har en höjning av priset hittills kunnat undvikas. Omkostnaderna öka emellertid nu i ett tempo, som nödvändiggör en höjning.

En ännu kraftigare höjning — från 8 kr. till 12 kr. — gjordes under dyrtiden i början av 20-talet. Priset sänktes 1925 till 8 kr. som gällt alltsedan. Att det nu måste regleras uppåt torde inte förvåna någon. Likväl är det en åtgärd, som red. högst ogärna har vidtagit.

Stockholm i dec. 1947.

Red. av Elementa.

Insänd litteratur.

F. E. Relton, *Applied Bessel Functions,* Blackie & Son, London and Glasgow 1946, Pp. 191, 17 s. 6 d.

L. J. Mordell, *A Chapter in the Theory of Numbers,* Cambridge University Press 1947, Pp. 31, 1 s. 6 d.

H. A. Bethe, *Elementary Nuclear Theory,* John Wiley & Sons, New York 1947, Pp. 147, $ 2.50.

G. R. Clements and L. Th. Wilson, *Manual of Mathematics and Mechanics,* Sec. Ed., McGraw-Hill Book Company, New York and London 1947, Pp. 349, 16 s. 6 d.

J. B. Rosser, R. R. Newton, G, L. Gross, *Mathematical Theory of Rocket Flight,* McGraw-Hill Book Company, New York and London 1947, Pp. 276, 22 s. 6 d.

L. F. Hamilton, S. G. Simpson, *Calculations of Analytical Chemistry,* Fourth Ed., McGraw-Hill Book Company, New York and London 1947, Pp. 387, 17 s. 6 d.

E. D. Eastman, G. K. Rollefson, *Physical Chemistry,* McGraw-Hill Book Company, New York and London 1947, Pp. 504, 22 s. 6 d.

D. G. Fink, *Radar Engineering,* McGraw-Hill Book Company, New York and London 1947, Pp. 644, 35 s.

N. G. Pakre III, *Guide to the Literature of Mathematics and Physics.* McGraw-Hill, New York and London 1947. Pp. 205, 25 s. net.

James Jeans, *The Growth of Physical Science.* Cambridge Univ. Press 1947. Pp. 364, 12 s. 6 d.

E. A. Hylleraas, *Atomene—Forskningens vei mot ukjent land,* Cammermeyers Boghandel, Oslo 1947, 239 s., inb. kr. 13: 75.

T. Philipson, *Preparativ oorganisk kemi,* Almkvist & Wiksell, Uppsala 1947, 158 s., kr. 5: 50.

P. Wessel, *Physik.* Für das Studium an Techn. Hochschulen und Univers. 71—74 Tausend. E. Reinhardt Verlag, Basel 1947, 560 Seiten, Schw. Fr. 11: 50.

Statens läroboksnämnd, 1947 års suppl. till läroboksförteckning, Stockholm 1947, 37 s.

B. Böös-J. Lundberg, *Lärobok i kemi för gymnasiet,* 6:te omarb. uppl., Sv. Bokförl., Sthlm 1947, 374 s., kr. 6: —.

Rendahl-Wahlström-Frank, *Räknebok för realskolan II,* 5:e uppl., Sv. Bokförl., Sthlm 1947, 103 s., kr. 1: 65.

Magnhild Gentz, *Nu räkna vi själva,* Andra skolåret, Sv. Bokförl., Sthlm 1947, 64 s., 90 öre.

Moll-Rudberg, *Lärobok i fysik I,* 13:e uppl., Sv. Bokförl., Sthlm 1947, 60 s., kr. 1: 55.

Obs! Nedsatt pris.

APOLLONIOS'

tre första böcker om

KÄGELSNITTEN

översatta till modernt matematiskt språk av

AGNE WAHLGREN.

Pris 1: 50.

A.-B. Seelig & C:o.

BAND 25

AV

SVENSKA FYSIKERSAMFUNDETS PUBLIKATION

KOSMOS

utkommer inom kort med följande innehåll:

1. Max Planck. Av prof. Lise Meitner.
2. P. W. Bridgman. Av fil. dr Anna Beckman.
3. E. V. Appleton. Av fil. dr Anna Beckman.
4. Egenskaper hos flytande helium. Av dr J. Kistemaker.
5. Synkro-cyklotronen og synkrotronen. Av cand. real. Arne Lundby.
6. Mikrovågsrör. Av civilingenjörerna K. Engström och L. Elfving.
7. Om spektralanalysens ljuskällor ur fysikalisk synpunkt. Av fil. lic. Lennart Huldt.
8. Tunga kärnpartiklars spår i fotografiska emulsioner. Av fil. mag. Lars Carlbom.
9. Modellföreställningar om atomkärnornas byggnad. Av prof. Nils Ryde.
10. Moderna neutronspektrometrar. Av civilingenjör Guy von Dardel.

Då Kosmos innehåller orienterande framställningar över aktuella problem inom den fysikaliska forskningen, torde den vara av *värde i synnerhet för alla fysiklärare och borde ej saknas i något skolbibliotek.*

Boken tillställes samfundets medlemmar *inbunden* jämte medlemsförteckning och kvitto på medlemsavgift som postförskottsförsändelse à Kr. 10:—. Medlemskap erhålles efter hänvändelse till *fil. dr fru Anna Beckman, Lilljeborgsvägen 3, Uppsala.* Även institutioner och bibliotek ävensom personer, institutioner och bibliotek i de övriga nordiska länderna antagas som medlemmar.

Medlemmar i samfundet kunna i mån av tillgång erhålla bundna exemplar av band 1 samt 3—8 för högst 5 kr. pr styck och av band 9—24 för 10 kronor pr styck inkl. porto.

Matematisk statistik — problem, metoder och tillämpningar.

Av docent G. ELFVING, Helsingfors.

1. I en tidigare artikel (*Elementa* 1947: 1) har förf. till denna uppsats sökt klarlägga grundvalarna för sannolikhetskalkylen och därvid betecknat densamma som den matematiska teorien för slumpmässiga massföreteelser. Samma uttryck kan med fog användas om den matematiska statistiken. De båda disciplinerna täcka i stor utsträckning varandra, och det är icke helt lätt att ange skillnaden mellan dem. Historiskt sett är sannolikhetskalkylen en gren av matematiken, närmast framsprungen ur vissa schematiska hasardspelsproblem, medan den matematiska statistiken framvuxit ur den praktiska samhällsstatistikens och naturforskningens behov. Så som språkbruket utvecklat sig, torde man i detta nu kunna säga, att den matematiska statistiken sammanfaller med sannolikhetskalkylen i dess tillämpning på sådana massföreteelser, där de enskilda »individerna» alltjämt äro skönjbara: den är en tillpassnings- och prövningsmetodik avsedd för analys av stickprov och med dem jämförbara statistiska observationsserier. Utanför densamma falla däremot sådana tillämpningar av sannolikhetskalkylen som t. ex. den statistiska mekaniken.

Syftet med den föreliggande uppsatsen är att söka ge en föreställning om den matematiska statistikens problematik och samtidigt vissa glimtar av dess användningar och av de sannolikhetsschemata som dessa ge upphov till.

I.

2. Med tanke på läsare, som stå det här behandlade området fjärran, är det måhända på sin plats att börja med en kort sammanställning av några grundläggande sannolikhetsteoretiska begrepp och beteckningar. Vi anknyta härvid till vår föregående artikel.

Ett försök E, vars utgång varierar slumpmässigt, beskrives matematiskt, såsom i den nämnda artikeln visades, förmedelst ett *sannolikhetsfält*, dvs. en mängd, vars element svara mot försökets samtliga möjliga realisationer, och ett på denna mängd definierat mått, sannolikheten $P(A)$.

En storhet ξ, som är knuten till försöket E, så att dess värde är fullt bestämt genom utgången av E, kallas en *tillfällig storhet* eller *stokastisk variabel*; ξ är sålunda, matematiskt sett, en på sannolikhetsfältet definierad punktfunktion. Alla sannolikheter, som hänföra sig till ξ, konstituera tillsammans denna variabels *fördelning*; vi kunna tänka oss densamma åskådliggjord av en över ξ-axeln utbredd massa av totalbeloppet 1. Fördelningen är fullt bestämd genom *fördelningsfunktionen*

$$F(x) = P(\xi \leqq x).$$

En *kontinuerlig* variabels fördelning kan även beskrivas medelst *frekvensfunktionen* $f(x) = F'(x)$, åskådligt tydbar såsom fördelningens sannolikhetstäthet i punkten x. En *diskontinuerlig* variabel antar endast vissa diskreta värden $x_1, x_2, \ldots$ med till dem hörande sannolikheter $p_1, p_2, \ldots$ Såsom exempel på kontinuerliga och diskontinuerliga fördelningar må anföras den *normala fördelningen* och *Poisson-fördelningen*, för vilka resp.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}; \qquad p_k = \frac{a^k}{k!} e^{-a}; \tag{1/2}$$

kvantiteterna m, σ och a äro fördelningarnas *parametrar*.

Det är ofta önskvärt att sammanfatta huvuddragen av en fördelning i några få *karaktäristikor*. Som sådana tjäna främst *medelvärdet* $E(\xi)$ och *spridningen* $D(\xi)$, vilka i det kontinuerliga resp. det diskontinuerliga fallet definieras genom likheterna

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad \text{resp.} \quad \sum_k p_k x_k$$

och

$$D^2(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(\xi))^2 f(x) dx \quad \text{resp.} \quad \sum_k p_k (x_k - E(\xi))^2.$$

För den normala fördelningen är $E(\xi) = m$, $D(\xi) = \sigma$.

För ett *variabelpar* (en tvådimensional variabel) ξ, η kunna begrepp motsvarande de ovanstående införas. Vi tala här om variablernas *simultanfördelning* och tänka oss densamma åskådliggjord genom en över $\xi\eta$-planet utbredd massa. Vid sidan av de enskilda variablernas medelvärden och spridningar uppträder här som en betydelsefull karaktäristika *korrelationskoefficienten*

$$\varrho = \frac{E\{[\xi - E(\xi)]\,[\eta - E(\eta)]\}}{D(\xi)\,D(\eta)}.$$

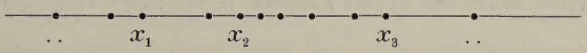
Om ξ och η äro *oberoende*, är sannolikhetstätheten $f(x, y) = f_\xi(x) f_\eta(y)$ och $\varrho = 0$. — På liknande sätt beskrivas flerdimensionala fördelningar.

3. *Samplebegreppet.* Låt oss nu, för att klarlägga den matematiska statistikens grundläggande begrepp, *samplet*, för ett ögonblick återgå till sannolikhetens empiriska bakgrund.

Låt ξ vara en tillfällig storhet förknippad med ett visst försök eller en viss observation E — man må tänka t. ex. på mätning av kroppslängden hos individer av en viss djurart. Låt vidare A vara t. ex. ett visst intervall på x-axeln. Upprepas det betraktade försöket n gånger, erhålles för ξ en följd av värden

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \tag{3}$$

av vilka ett visst antal $n(A)$ faller inom intervallet A. Talet $P^*(A) = n(A)/n$ utgör den relativa frekvensen för händelsen $\xi \in A$ i observationsserien (3). Tänka vi oss massor av storleken $1/n$ placerade i punkterna (3), en för varje observation, blir den sammanlagda massan inom A lika med $P^*(A)$. Vi kunna säga att observationsserien (3) definierar en empirisk fördelning



(4)

på x-axeln.

Antag nu, att försöket E på ett tillfredsställande sätt kan beskrivas förmedelst ett visst sannolikhetsschema. Detta innebär, att de empiriska frekvenserna $P^*(A)$ med växande n tendera att närma sig vissa mot dem svarande sannolikheter $P(A)$. Vi kunna åskådligt säga, att sannolikhetsfunktionen $P(A)$ beskriver ξ:s fördelning inom ett fingerat oändligt kollektiv av observationer, ofta även betecknat som den *oändliga populationen.* Följden (3) framstår som ett stickprov eller *sample* ur denna population, och den i (4) åskådliggjorda fördelningen som en mer eller mindre ofullkomlig — man kunde med en lätt romantisering av uttryckssättet säga »timlig» — återspegling av den ideala fördelningen $P(A)$.

Forskarens syfte är i allmänhet att dra slutsatser ur samplet rörande den »bakomliggande» populationen — han vill sluta från det efemära till det bestående. Från en något annan synpunkt kan man säga, att han vill separera de drag i fenomenen, som han kan urskilja och behärska, från de tallösa variationer, som han icke kan eller bryr sig om att finna något mönster för, och som han därför betecknar som »tillfälliga».

För att kunna bedöma inflytandet av dessa tillfälliga variationer behöver han emellertid ett matematiskt schema också för samplet, vars begrepp här ovan fattats helt empiriskt. Vilket blir detta schema?

I det här behandlade fallet med ett s. k. *enkelt* sample — dvs. en följd av oberoende observationer anställda under, ytligt sett, identiska betingelser — är svaret lätt att ge. Den n-faldiga upprepningen av försöket E beskrives ju genom en »produkt» av n identiska sannolikhetsfält, och talen (3) äro sålunda, matematiskt sett, att fatta som n stycken i produktfältet definierade, oberoende och lika fördelade stokastiska variabler.

Uttrycket sample nyttjas ofta också i den vidsträcktare betydelsen av ett godtyckligt statistiskt material

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{5}$$

uppfattat som en speciell realisation av en n-dimensional stokastisk variabel med en viss supponerad sannolikhetsfördelning. Om komponenterna x_i härvid äro beroende eller oberoende, lika eller olika fördelade, spelar nu ingen roll; väsentligt för att den statistiska metodiken skall kunna komma till användning är däremot, att antalet data n är stort i jämförelse med antalet obekanta parametrar i sannolikhetsschemat. — Exempel på samples av den här antydda allmänna typen komma vi att möta längre fram.

4. *Estimationsproblemet.* De flesta sannolikhetsschemata som komma till användning äro bestämda endast till sin analytiska form men innehålla parametrar, som måste bestämmas ur det föreliggande statistiska materialet. Ha vi t. ex. ett antal observationer av en storhet, som antages normalfördelad, stå vi inför uppgiften att bestämma medelvärdet m och spridningen σ. Föreligger en följd av — t. ex. ekonomiska — data, som hänföra sig till olika tidpunkter, och vilka vi äro benägna att tillskriva en s. k. lineär trend, dvs. ett sannolikhetsschema av formen

$$x_t = a + bt + \xi_t,$$

där ξ_t betecknar en slumpmässig störningsterm, så återstår för oss att bestämma a och b, eventuellt också störningstermens spridning, ur materialet, osv. Allmänt kan det här antydda *estimationsproblemet* tydligen formuleras så: Vi antaga, att samplet (5) besitter en viss sannolikhetsfördelning $P(A_X;\ \alpha_1, \ldots, \alpha_s)$, där $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ äro obekanta parametrar; det gäller att med hjälp av samplet *skatta* eller *estimera* dessa. Annorlunda uttryckt: det gäller att ange funktioner

$$\alpha_\nu^* = \alpha_\nu^*(x_1, \ldots, x_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, s), \tag{6}$$

vilka, i någon mening som det ännu återstår att precisera, ansluta sig möjligast nära till konstanterna $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$.

I syfte att närmare kringgränsa det ställda problemet konstatera vi till en början, att varje skattning (6), i sin egenskap av funktion av samplevärdena, i sin tur är en tillfällig storhet — om än, i allmänhet, en relativt stabil sådan. Under sådana omständigheter innebär kravet på en möjligast tillfredsställande skattning tydligen, att *fördelningen* för estimatet α^* bör vara i möjligaste mån koncentrerad kring det sanna värdet α. Man kan t. ex. ställa kravet att $E(\alpha^*)$ bör vara lika med α och $D(\alpha^*)$ mindre än för varje annan skattning.

Det skulle föra för långt att här ingå på en närmare diskussion av dessa krav och deras konsekvenser. Som illustration till estimationsproblemet skola vi emellertid något beröra en allmän princip, som visat sig synnerligen fruktbärande, den s. k. *maximaliseringsprincipen.*

Till varje värdesystem (5) — m. a. o. till varje punkt i »samplerummet» — och varje uppsättning parametervärden hör en viss sannolikhet resp. (i det kontinuerliga fallet) sannolikhetstäthet

$$L(x_1, \ldots, x_n;\ \alpha_1, \ldots, \alpha_s); \tag{7}$$

i fall av ett enkelt endimensionalt sample är L helt enkelt produkten av frekvensfunktionsvärdena $f(x_i;\ \alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Enligt maximaliseringsprincipen äro nu de värden $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ att anses som de »bästa», vilka — för de givna värdena $x_1, \ldots, x_n$ — maximera uttrycket (7). Det kan visas, att denna princip leder till skattningar som — åtminstone asymptotiskt, dvs. för stora samples — uppfylla de tidigare framkastade kraven beträffande medelvärde och spridning. — Tillämpad på ett enkelt sample ur en normalfördelad population leder maximaliseringsprincipen till skattningarna

$$m^* = \bar{x} = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}, \quad \sigma^* = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}, \tag{8}$$

alltså till samplefördelningens medelvärde och spridning — ett resultat som ju även i och för sig förefaller plausibelt med tanke på det fundamentala sambandet mellan samplefördelningen och sannolikhetsfördelningen.

Nära förknippad med frågan om den bästa skattningen av en parameter är frågan om denna skattnings noggrannhet. Inom naturvetenskapen är det sedan gammalt vedertagen praxis att ange noggrannheten av ett empiriskt bestämt värde medels detta värdes spridning, i detta sammanhang vanligen kallad medelfelet; hela observationsresultatet skrives vanligen i formen

$$\alpha = \alpha^* \pm D(\alpha^*), \tag{9}$$

varvid de i $D(\alpha^*)$ eventuellt ingående obekanta parametrarna i sin tur skattas ur materialet. Man utgår vanligen från att α^* är en medelvärdesriktig skattning och därtill åtminstone tillnärmelsevis normalt fördelad; bägge dessa förutsättningar kunna i själva verket tämligen allmänt visas vara uppfyllda, om samplet är stort och skattningen baserad på maximaliseringsprincipen.

Likheten (9) har, under de nämnda förhållandena, följande konkreta innebörd. Antag att vi enats om en viss »sannolikhetsnivå» $1-\varepsilon$ (t. ex. 0,95) vilken vi betrakta som liktydig med praktisk visshet. Ur tabeller över fördelningen av en normerad normal variabel λ (dvs. en normalfördelad variabel med medelvärdet 0 och spridningen 1) kunna vi bestämma ett tal λ_ε sådant att $P\{|\lambda|>\lambda_\varepsilon\}=\varepsilon$; sålunda är t. ex. $\lambda_{0,05}=1{,}96$. Då nu $(\alpha^*-\alpha)/D(\alpha^*)$, enligt våra antaganden, är just en sådan variabel, sluta vi att olikheten

$$\alpha^*-\lambda_\varepsilon D(\alpha^*)<\alpha<\alpha^*+\lambda_\varepsilon D(\alpha^*) \tag{10}$$

gäller med sannolikheten $1-\varepsilon$, alltså, på den accepterade sannolikhetsnivån, med praktisk visshet.

Olikheten (10) ger ett s. k. *konfidensintervall* för parametern α. Allmänt förstås med detta uttryck ett intervall $(\alpha'_\varepsilon,\ \alpha''_\varepsilon)$, som beror enbart av samplet (5) och av talet ε, och som uppfyller villkoret

$$P(\alpha'_\varepsilon<\alpha<\alpha''_\varepsilon)=1-\varepsilon.$$

Det bör framhållas, att varje konfidensintervall är ett *stokastiskt* intervall och sålunda varierar från sample till sample. I det långa loppet ha vi emellertid rätt att vänta oss, att detsamma i $N(1-\varepsilon)$ fall av N skall innehålla parametervärdet α.

5. *Hypotesprövningsproblemet.* I nära samband med estimationsproblemet står den matematiska statistikens andra huvuduppgift: att på basis av föreliggande statistiskt material pröva hållbarheten av olika hypoteser. I syfte att illustrera problemställningen ge vi till en början två exempel.

1) Vid ett korsningsförsök klassificeras $n=560$ individer med hänsyn till de varandra uteslutande egenskaperna A_1, A_2, A_3, A_4. På grund av vissa förenklande antaganden är man böjd att försöksvis tillskriva de olika alternativen sannolikheterna $p_i^0=\frac{9}{16}, \frac{3}{16}, \frac{3}{16}, \frac{1}{16}$. De faktiskt observerade och de under den nämnda förutsättningen genomsnittligt väntade frekvenstalen befinnas vara

$$\begin{array}{lllll} \nu_i=328 & 122 & 77 & 33 & \\ np_i^0=315 & 105 & 105 & 35. & \end{array} \tag{11}$$

Frågan gäller: äro diskrepanserna mellan de förra och de senare så stora, att de måste anses fällande för hypotesen 9:3:3:1, eller kunna de bortförklaras såsom tillfälliga?

Det sannolikhetsschema, som vi applicera på vårt problem, är tydligen schemat för kombinationen av n oberoende försök, vart och ett uppvisande fyra alternativ med sannolikheterna resp. $p_1, \ldots, p_4$; speciellt intressera vi oss för det fall i vilket $p_i = \overset{0}{p}_i$ $(i = 1, \ldots, 4)$. Ett naturligt tillvägagångssätt synes nu vara att bilda ett samlat mått på diskrepanserna i (11) och bedöma observationsresultaten i ljuset av sannolikhetsfördelningen för detsamma. Ett dylikt diskrepansmått av vidsträckt användbarhet utgör den av K. Pearson introducerade kvantiteten

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(\nu_i - n\overset{0}{p}_i)^2}{n\overset{0}{p}_i}. \tag{12}$$

Denna storhet — som givetvis, inom ramen för vårt sannolikhetsschema, är en stokastisk variabel — har den stora fördelen att dess fördelning, under förutsättning att talen $\overset{0}{p}_i$ utgöra de faktiska sannolikheterna, är approximativt oberoende av de nämnda talen och av n; den beror endast av antalet alternativa kategorier. I vårt exempel finner man $\chi^2 = 10{,}9$; tabellerna upplysa om att redan sannolikheten för $\chi^2 > 7{,}82$ är lika med 0,05; på sannolikhetsnivån 0,95 synes oss därför ett förkastande av hypotesen 9:3:3:1 ofrånkomligt.

2) Vid ett lantbruksförsök prövas effekten av ett gödningsmedel A. För att få en uppfattning om de slumpmässiga variationerna besår man inalles 20 likadana jordlotter och behandlar hälften av dem med gödningsmedlet ifråga. Vid skörden noteras följande kvantiteter:

A:	6,2	5,7	6,5	6,0	6,3	5,8	5,7	6,0	6,0	5,8
Icke-A:	5,6	5,9	5,6	5,7	5,8	5,7	6,0	5,5	5,7	5,5.

(13)

Utgör resultatet ett övertygande bevis på gödningsmedlets effektivitet?

Med hänsyn till erfarenheter vunna vid liknande försök synes det plausibelt att betrakta de enskilda skörderesultaten såsom oberoende normalfördelade variabler med en viss (obekant) spridning σ. Vad medelvärdena beträffar, ha vi tydligen a priori att räkna med olika värden m_1 och m_2 för A och icke-A; om gödningsmedlet är utan effekt, är $m_1 = m_2$.

Det ligger nära till hands att bilda skillnaden mellan *samplemedelvärdena* m_1^* och m_2^* — alltså de båda radernas i (13) aritmetiska medeltal — och jämföra denna skillnad med ett lämpligt mått på slumpvariationerna. I detta syfte bilda vi spridningsmåttet

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma(x_{1i} - m_1^*)^2 + \Sigma(x_{2i} - m_2^*)^2}{n_1 + n_2 - 2}},$$

där, i vårt exempel, $n_1 = n_2 = 10$, och därefter kvoten

$$t = \sqrt{\frac{n_1\, n_2}{n_1 + n_2}} \cdot \frac{m_1^* - m_2^*}{s}.$$

Fördelningen för denna kvot är, om hypotesen $m_1 = m_2$ är riktig, oberoende av alla schemats parametrar och avhängig endast av $n_1 + n_2$; den finnes tabulerad i alla statistiska handböcker. I vårt exempel finna vi $t = 3{,}03$. Enligt tabellerna är redan $P(t > 2{,}55) = 0{,}01$, och det synes oss därför rimligt att förkasta hypotesen $m_1 = m_2$. Gödningsmedlet har visat sig ha en på sannolikhetsnivån $0{,}99$ *signifikant* effekt.

Vi skola nu, i ljuset av ovanstående modellproblem, söka ge en allmän beskrivning av den statistiska hypotesprövningsproceduren.

I bägge exemplen föreligger ett visst material — ett sample — X, tillika med ett visst av oss accepterat allmänt sannolikhetsschema, vilket vi beteckna som den *allmänna hypotesen* H. Inom ramen för denna allmänna hypotes intressera vi oss för en viss speciell *nollhypotes* H_0 (eller dess motsats); H_0 utmärkes i allmänhet av relativt enkla egenskaper men kan alltjämt innehålla obekanta parametrar. I syfte att pröva nollhypotesen bilda vi en funktion av samplet, *testvariabeln* λ (i exemplen χ^2 resp. t), vars fördelning vi behärska under förutsättning att nollhypotesen gäller, och som synes oss utgöra ett plausibelt mått på samplets diskrepans från denna hypotes. Om nu λ når upp till värden som vi, på basis av en viss konventionell sannolikhetsskala, anse vara »för stora», förkasta vi H_0.

I våra exempel motiverades valet av testvariabel helt heuristiskt. I syfte att härutinnan nå fram till mera påtagliga principer skola vi något närmare analysera ändamålet med hypotesprövningen.

Prövnings- eller *testnings*förfarandet är en statistisk procedur, vid vilken vi löpa risken att begå ettdera av följande fel: att förkasta nollhypotesen i fall då den är riktig (detta inträffar tydligen om λ »tillfälligtvis» får ett stort värde); och att acceptera nollhypotesen i fall då den är felaktig. Det har blivit brukligt att beteckna dessa båda slag av felomdömen såsom »fel av första slaget» och »fel av andra slaget».

Vid testningen är uppmärksamheten främst inriktad på felen av första slaget; arbeta vi konsekvent på en överenskommen sannolikhetsnivå om t. ex. 0,95, så kunna vi, i kraft av vår procedur, räkna med att begå fel av det nämnda slaget i blott ett fall på tjugo. Att man i första hand garderar sig mot ett förhastat förkastande av nollhypotesen bör givetvis ses mot bakgrunden av naturforskningens allmänna moralbud: föredrag en enklare förklaring framför en mera komplicerad och acceptera icke förmodade effekter utan övertygande bevisning!

Graden av vår fruktan för felomdömen av första slaget bestämma testets sannolikhetsnivå $1-\varepsilon$. Däremot är det vår strävan att i görligaste mån undvika också fel av andra slaget, som dikterar själva valet av kriterium: testvariabeln bör tydligen vara möjligast *känslig* för avvikelser från H_0-schemat. Det skulle föra för långt att här följa denna tankelinje vidare; vi skola emellertid till belysning av frågan anföra en intuitivt tilltalande och i många fall fruktbar testvalsprincip, den s. k. *likelihood-ratio*-principen.

Låt, såsom i föregående paragraf, $L(x_1, \ldots, x_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ vara samplets sannolikhetstäthet, och låt nollhypotesen för enkelhets skull uttryckas i likheterna

$$\alpha_1 = \alpha_1^0, \ldots, \alpha_r = \alpha_r^0. \qquad (r \leqq s).$$

Förhållandet

$$\lambda = \frac{\max\limits_{\alpha_1, \ldots, \alpha_s} L(x_1, \ldots, x_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_s)}{\max\limits_{\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_s} L(x_1, \ldots, x_n; \alpha_1^0, \ldots, \alpha_r^0, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_s)} \tag{14}$$

är tydligen en funktion enbart av samplevärdena $x_1, \ldots, x_n$ och de hypotetiska parametervärdena $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_r^0$. Man inser omedelbart, att $\lambda \geqq 1$. Om λ är nära 1, är nämnaren i (14) nära lika med täljaren, dvs. hypotesen H_0 är i stånd att ge en ungefär lika så god »förklaring» av det erhållna samplet som den allmänna hypotesen; är däremot λ stort, synes oss H_0 ge en relativt dålig förklaring av observationerna. Visar det sig nu ytterligare, att λ — inom ramen för schemat H_0 — har en sannolikhetsfördelning som är oberoende av de obekanta parametrarna $\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_s$, så är storheten ifråga väl meriterad för testvariabelns ansvarsfulla uppgift.

II.

6. Våra hittillsvarande överläggningar ha gällt principproblem. Vi skola nu ge en översikt av några intressanta matematisk-statistiska schemata och samtidigt några antydningar om deras användning.

Regressionsschemata. Hela den från naturvetenskaperna välkända fel- och utjämningskalkylen är intet annat än en tillämpning av maximaliseringsprincipen på vissa speciella schemata. Vi skola illustrera detta med några exempel.

Låt $l_1, \ldots, l_n$ vara resultaten av n mätningar av en stavs längd, verkställda vid olika, bekanta temperaturer $t_1, \ldots, t_n$. Antages den termiska längdutvidgningen lineär, och antagas vidare observationsfelen normalfördelade med konstant spridning σ, så ha vi för vårt material ett fullt bestämt schema

$$l_i = l_0 + \alpha t_i + \eta; \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Bearbetarens intresse knyter sig givetvis främst till estimationen av parametrarna l_0 och α. — Vi ha här ett enkelt exempel på ett sample, där observationerna äro oberoende men icke lika fördelade: medelvärdet för l varierar från observation till observation.

Idén med slumpmässiga »fel» eller »störningar» lagrade på en fast trendlinje låter sig på ett självfallet sätt generaliseras till exempelvis polynomiska trender och sinustrender, alltså till hypoteser av formen

$$y = \beta_0 + \beta_1 t + \ldots + \beta_k t^k + \eta$$

resp.

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 \cos kt + \beta_1 \sin kt + \eta,$$

där t vanligen betyder tiden. Schemata av detta slag komma till användning t. ex. inom nationalekonomien.

En ytterligare generalisering levererar det allmänna lineära regressionsschemat

$$\begin{aligned} y_1 &= \beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{21} + \ldots + \beta_k x_{k1} + \eta_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (k < n), \\ y_n &= \beta_1 x_{1n} + \beta_2 x_{2n} + \ldots + \beta_k x_{kn} + \eta_n, \end{aligned} \qquad (15)$$

där talen y_j utgöra observationsresultaten, talen x_{ij} äro bekanta kvantiteter, koefficienterna β_i obekanta konstanter, och »felen» η_j, slutligen, stokastiska variabler. Antaga vi att dessa variabler äro oberoende och normalfördelade med medelvärdet 0 och lika spridning, leder oss koefficientbestämningsproblemet, via maximaliseringsprincipen, till den klassiska minstakvadratmetoden.

Vi skola något närmare granska ett specialfall av (15).

Låt oss antaga, att man vid ett lantbruksförsök vill undersöka effekten av k olika brukningsmetoder (nedan kallade »behandlingar») på skörden av en viss nyttoväxt. För att få en uppfattning om de tillfälliga variationerna måste experimentatorn tillämpa varje behandling på ett flertal, låt oss säga r jordlotter eller *rutor*; hela försöket kommer alltså att omfatta kr sådana. En area av detta omfång kan emellertid befaras vara heterogen med avseende på jordens bördighet, och den uppdelas därför lämpligen i r *block* om k rutor i vartdera. Varje block bör utgöra en så homogen enhet som möjligt, och alla k behandlingarna skola vara representerade inom detsamma. Mellan blocken kunna däremot avsevärda fertilitetsdifferenser förefinnas.

Det ligger nu nära till hands att antaga, att »blockeffekterna» och »behandlingseffekterna» helt enkelt sammansätta sig additivt, varjämte för varje ruta en rent slumpmässig störningsterm tillkommer. Vi ledas sålunda till ett schema av formen

$$y_{ij} = \alpha_0 + \alpha_i + \beta_j + \eta_{ij} \qquad (i = 1, \ldots, r;\ j = 1, \ldots, k) \tag{16}$$

för skörderesultaten på de olika rutorna. Här kunna konstanterna $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ och $\beta_1, \ldots, \beta_k$ var för sig antagas ha medeltalet 0 — deras medeltal kunna nämligen i motsatt fall sammanslås med α_0. Schemat innehåller sålunda väsentligen $k + r - 1$ koefficienter och avslöjar sig som ett specialfall av (15), i vilket $n = kr$, och talen x_{ij} endast kunna antaga värdena 0, 1 och -1.

I det föreliggande problemet äro parametrarna α helt irrelevanta; de äro till blott för att elimineras. Vårt intresse riktar sig i första hand på hypotesen $\beta_1 = \ldots = \beta_k = 0$, dvs. på frågan huruvida de olika behandlingarna alls ha olika effekt, och därnäst, om så visar sig vara fallet, på en jämförelse mellan dem. För problem av detta slag — på vilka det här anförda givetvis blott är ett enkelt exempel — har R. A. Fisher utarbetat en synnerligen fruktbar och smidig teknik, den s. k. *variansanalysen.* Dess grundidé är uppdelningen av materialets totala variation i komponenter svarande mot de olika systematiska och slumpmässiga variationsorsakerna.

7. *Korrelationsschemata.* Som en självfallen generalisering av det enkla endimensionala samplet (3) framstår det enkla k-dimensionala samplet

$$\begin{matrix} x_{11}\, x_{12} \cdots x_{1n}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{k1}\, x_{k2} \cdots x_{kn}, \end{matrix} \tag{17}$$

i vilket kolumnerna äro oberoende och besitta samma simultanfördelning; här är alltså fråga om n oberoende observationer av k variabler $\xi_1, \ldots, \xi_k$, vilka kunna vara sinsemellan korrelerade. Intresset knyter sig i allmänhet främst till korrelationssambanden och till möjligheten att ställa prognoser för en eller flera av variablerna ξ, då man har kännedom om de övriga. Man kan visa att t. ex.

$$\xi_1 = \alpha_1 + \beta_{12}\xi_2 + \dots + \beta_{1k}\xi_k + \eta_1, \tag{18}$$

där »resttermen» η_1 är okorrelerad med $\xi_2, \dots, \xi_k$, och $\alpha_1, \beta_{12}, \dots, \beta_{1k}$ äro konstanta koefficienter, som kunna estimeras ur samplet (17). Om η_1 har ringa spridning i förhållande till ξ_1 ger (18) en nära nog uttömmande prognos för ξ_1 på basis av $\xi_2, \dots, \xi_k$.

Korrelationer mellan statistiska storheter kunna ofta förklaras genom antagandet att de korrelerade variablerna äro lineärt uppbyggda av helt eller delvis gemensamma, sinsemellan oberoende komponenter. Som exempel härpå skola vi något närmare behandla det s. k. *faktorschemat.*

Vid psykologisk testning — icke att förväxla med testning i statistisk mening — underkastas som bekant försökspersonerna P_ν ($\nu = 1, \dots, n$) olikartade prov T_i ($i = 1, \dots, k$), varvid deras prestationer bedömas med poängtal $x_{i\nu}$. Det ligger nära till hands att söka förklara dessa sistnämnda på basis av ett litet antal allmänna psykiska »faktorer», sådana som minne, associationsförmåga osv.; utöver dessa gemensamma komponenter måste man givetvis räkna med restkomponenter, som hänföra sig till de speciella testen, och som kunna antagas oberoende av varandra, om blott de sistnämnda äro någorlunda olikartade. Utgå vi t. ex. från den Spearmanska hypotesen om en enda central intelligensfaktor, ledas vi till ett schema av formen

$$x_{i\nu} = a_i g_\nu + \xi_{i\nu}, \tag{19}$$

där talen $x_{i\nu}$, g_ν, $\xi_{i\nu}$ äro stokastiska variabler och talen a_i obekanta konstanter. Bearbetarens uppgift blir dels att testa schemats tillämplighet — t. ex. inom ramen för en likartad men mera komplicerad hypotes —, dels att estimera vikterna a_i, dels slutligen att renodla de a priori obekanta individuella faktorvärdena g_ν.

8. *Tidsserier och stokastiska processer.* De samples vi hittills betraktat ha utgjorts av observationsserier, vilkas olika led varit stokastiskt oberoende av varandra. Vi vända oss nu till serier av på ett eller annat sätt *kedjade* variabler och tränga därmed in på det intressanta kapitlet *stokastiska processer.*

Betrakta som exempel vattenståndet x_t i en sjö vid utgången av året t; vi antaga att x_t räknas från medelnivån. Med hänsyn till trögheten i avflödet är det naturligt att tänka sig x_t såsom beroende dels av föregående års vattenstånd x_{t-1}, dels av en »årsterm» y_t, väsentligen svarande mot nederbörden under året. Antaga vi ett lineärt samband mellan de tre storheterna, ledas vi till att förklara *tidsserien*

$$x_1, x_2, \ldots, x_t, \ldots, x_n \tag{20}$$

med hjälp av schemat

$$x_t = a x_{t-1} + y_t, \tag{21}$$

där a är en konstant, och variablerna y_t kunna antagas oberoende av varandra och av alla »äldre» x_t-värden samt lika fördelade. Strukturen (21) kommer i serien (20) till synes i en viss tröghet i variationen, m. a. o. en korrelation mellan angränsande x_t-värden. Inför ett material av här antytt slag blir statistikerns uppgift främst att estimera parametern a, eventuellt att testa hypotesen $a = 0$.

Schemat (21) kan osökt generaliseras till serier med flerårig kedjning och till flera serier i växelverkan med varandra. Dylika modeller torde kunna få en vidsträckt användning inom den teoretiska ekonomien. — Det må påpekas, att en tidsserie (20) är att uppfatta som en enda observation av en n-dimensional stokastisk variabel med avhängiga komponenter; vi kunna säga, att samplet (17) här reducerats till en enda lång kolumn. Att en statistisk bearbetning det oaktat är möjlig beror givetvis på den fasta bindningen mellan de olika x_t-värdena; tack vare den är antalet obekanta parametrar alltjämt litet i jämförelse med antalet observationer. — För närmare belysning av dessa frågor hänvisas till Wold, 1938.

9. Vi skola till sist ägna några ord åt vissa stokastiska processer av något annan art än de ovan behandlade. Betrakta ett *trafikförlopp*: bilar som passera en räknarpost, anrop som inkomma till en telefoncentral, el. dyl. Ett sådant förlopp beskrives till sina väsentliga drag av tidpunkterna för de olika »trafikhändelserna» eller *incidenserna*, alltså av en monoton följd $t_1 \leqq t_2 \leqq \ldots$ av variabler, vilka vi på goda grunder kunna betrakta som slumpmässiga. Processer av detta slag betecknas som punktprocesser. De praktiska problem, som i dessa sammanhang möta, gälla i allmänhet riskerna för slumpmässig anhopning av incidenser och framgå ur experternas strävan till rationell dimensionering av trafikbanorna. Liknande frågor uppträda inom försäkringsteorien vid behandlingen av det s. k. ruinproblemet.

Ett särskilt enkelt schema för punktprocesser är det s. k. *Poisson*schemat; det går ut på, att de successiva mellantiderna $t_n - t_{n-1}$ antagas vara oberoende stokastiska variabler med en och samma frekvensfunktion pe^{-pt}, i vilken p utgör ett mått på trafikintensiteten. Genom att antaga den sistnämnda föränderlig och underkastad dels systematiska, dels slumpmässiga variationer, kan man utbygga Poissonschemat till en högre grad av realism: man har då en (hypotetisk) kontinuerlig »intensitetsprocess», som »bär upp» den aktuella punktprocessen (PALM, 1943).

Liknande problem möta vid taxering av skog på basis av taxeringslinjer eller provytor. Intensiteten motsvaras här av fertiliteten, alltså av en funktion av två variabler. Det praktiska problemet består i att uppskatta noggrannheten i den erhållna taxeringen, med beaktande av den korrelation mellan angränsande linjer och provytor som trögheten i jordmånsvariationerna ger upphov till. Det visar sig möjligt att konstruera schemata, som ta hänsyn till denna korrelation, och vilkas parametrar kunna estimeras med ledning av en lämpligt upplagd taxering (MATÉRN, 1947).

III.

10. Ett påfallande och intressant drag inom den moderna tilllämpade statistiken är tendensen att från början *planera* det experimentella arbetet med tanke på den motsedda statistiska analysen.

Ett område, där en rationell uppläggning av den statistiska rutinen redan ekonomiskt framstår som självfallen, är *industrien*. Sedan länge har man vid masstillverkning betjänat sig av stickprov, dels för att kontrollera själva produktionen och uppdaga eventuella rubbningar, dels för att, vid överlåtelsen av den färdiga varan, bereda köparen äskad trygghet till minsta möjliga kostnad för producenten. Särskilt intresse tilldrar sig härvidlag en under det andra världskriget i Amerika utarbetad stickprovningsteknik, den s. k. *sekvensanalysen*, vars grundidé är, att provens omfång ej på förhand fixeras (WALD, 1947).

Låt oss som exempel tänka på en produkt, som försäljes från fabriken i partier om 1000 exemplar. Köparen ställer kravet att partierna skola innehålla högst 4 procent utskottsexemplar; han är emellertid — för att ej behöva bära kostnaderna för en hundraprocentig granskning — villig att låta genomsnittligt 1 godkänt parti av 10 bryta mot denna regel. Producenten å sin sida har trimmat sin produktion för högst 2 procent utskott men är — av samma skäl som köparen — villig att finna sig i, att ett parti på tio kasseras (dvs. dömes till hundraprocentig granskning) oaktat dess utskottsfrekvens i verkligheten ej överstiger 2 procent.

Till data av detta slag levererar nu sekvensanalytikern två funktioner $a(m)$ och $b(m)$ tillika med en bruksanvisning av följande innehåll (det hela baserat på en icke alldeles enkel matematisk teori): Pröva i varje parti exemplaren ett efter ett, och låt d_m betyda antalet utskottsprodukter bland de m första exemplaren.

Om $d_m \leqq b(m)$: godkänn partiet;
Om $d_m \geqq a(m)$: kassera partiet;
Om $b(m) < d_m < a(m)$: fortsätt granskningen.

Iakttages denna regel, så bli riskerna för de båda av parterna motsedda felbedömningarna av högst den uppgivna storleken.

Man har funnit att man genom tillämpning av en lämpligt vald sekvensregel, i jämförelse med vanlig stickprovning av motsvarande kvalitet, genomsnittligt sänker antalet granskade exemplar till vid pass hälften.

11. Särskilt långt har den statistiska planeringen drivits inom det biologiska och lantbruksvetenskapliga forskningsområdet (jfr R. A. Fisher, 1942). Man har här utarbetat en stor mängd försöksmönster, avsedda att samtidigt tillgodose följande önskemål: a) simultan analys av flera olika effekter, b) elimination av systematiska felkällor, c) adekvat skattning av den slumpmässiga variationen. Som illustration till den på denna linje utarbetade metodiken skola vi redogöra för bruket av s. k. *romerska kvadrater*; vi anknyta härvid direkt till det variansanalytiska exemplet i § 6.

Antag att vi vilja undersöka effekten av fyra behandlingar, A, B, C och D, på skörden av en viss odlingsväxt. I syfte att eliminera åtminstone de grövsta fertilitetsvariationerna indelar man till en början, såsom tidigare sagts, den totala försöksarealen i ett antal möjligast kompakta block; vi kunna tänka oss dem kvadratiska. Även inom blocken måste man emellertid räkna med en viss variation i jordens fruktbarhet. Denna variation kan emellertid, om den antages *lineär*, elimineras på följande sätt:

Vi dela varje block i 16 kvadratiska rutor, och fördela de 4 behandlingarna på dessa rutor så, att varje behandling blir representerad i en rad och en kolumn, t. ex. enligt nedanstående plan:

$$\begin{array}{cccc} A & C & D & B \\ B & D & C & A \\ C & A & B & D \\ D & B & A & C \end{array} \qquad (22)$$

Beteckna vi fertilitetens rad- och kolumnkomponenter med α_i, β_j och behandlingseffekterna med γ_k $(i, j, k = 1, \ldots, 4)$, få vi ett regressionsschema av utseendet

$$y_{ijk} = \alpha_0 + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \eta_{ijk} \qquad (23)$$

för de 16 till ett visst block hörande skördevärdena. Då schemat innehåller blott 10 av varandra oberoende koefficienter, kunna dessa i princip estimeras, och därutöver återstå 6 ekvationer (man säger ofta: 6 frihetsgrader) per block för skattning av slumpvariationerna. Allt detta gäller givetvis för nära nog vilken som helst fördelning av behandlingarna över blocket. Estimationen kan emellertid gestaltas särskilt elegant, om fördelningen verkställes på det ovan stipulerade sättet: ur skördemedeltalen över alla rutor med samma behandling försvinna nämligen fertilitetseffekterna α_i, β_j, och variansanalysen ger automatiskt en medelfelsskattning, ur vilken dessa effekter äro utrensade.

Kombinatoriska arrangemang av typen (22) kallas romerska kvadrater och kunna konstrueras i stort antal; de ha alltsedan Eulers tid varit föremål även för de egentliga matematikernas intresse och finnas sammanställda i tabellverk.

I vårt exempel voro effekterna α_i och β_j i och för sig av intet intresse. Vid försök, där inga systematiska felkällor behöva elimineras, kan de nämnda storheternas plats i schemat intagas av två nya serier av relevanta effekter, som alltså fås undersökta samtidigt med γ-effekterna. Genom superposition av flera romerska kvadrater (varvid s. k. grekisk-romerska kvadrater erhållas) kan den antydda möjligheten till simultana undersökningar ytterligare utvidgas.

12. Ett högmodernt statistiskt forskningsfält bildas av de *representativa samhällsvetenskapliga undersökningarna*, mest kända i samband med Gallupinstitutens verksamhet. Vid dessa undersökningar önskar man som bekant ta reda på huru befolkningen t. ex. i ett visst land fördelar sig på vissa kategorier $A_1, \ldots, A_k$ — vi kunna tänka på åsiktsfördelningen i någon politisk fråga. I besparingssyfte undersöker man emellertid blott en liten del, t. ex. 1 %, av befolkningen. Härvid är givetvis sättet för stickprovets uttagande av fundamental betydelse.

Man skiljer mellan ren slumpsampling och styrd sampling. Vid tillämpning av det förra systemet utväljas »intervjuobjekten» i princip genom utlottning ur en förteckning över samtliga av undersökningen berörda individer. Vid den styrda samplingen åter låter man stickprovet återspegla befolkningens faktiska fördelning i vissa grundläggande avseenden, t. ex. med hänsyn till boplats (län; stad eller landsbygd), civilstånd osv.; inom de sålunda definierade subpopulationerna måste urvalet däremot vara slumpmässigt. Om kategorierna $A_1, \ldots, A_k$ äro företrädda i väsentligt olika proportioner i de olika subpopulationerna, kan man lätt visa, att den styrda samplingen leder till en pålitligare skattning. Rakt motsatt blir givetvis förhållandet, om stickprovet som helhet uttages slumpmässigt, t. ex. så att ett på måfå valt län får representera hela landet.

13. De representativa undersökningarna och den tidigare beskrivna fälttekniken med romerska kvadrater illustrera var på sitt sätt två principer giltiga för all försöksplanering; de kunna fångas i orden *stratifiering* och *randomisering*. Det förra uttrycket syftar på arrangemang avsedda att ta med i räkningen — eventuellt eliminera — alla uppspårbara systematiska variationsorsaker: fertilitetsgradienten, den geografiska komponenten i opinionsfördelningen osv. Randomiseringen åter betecknar försöksplanerarens åtgärder i syfte att ge alla återstående variationer slumpkaraktär och därmed få dem med i feluppskattningen. Om de båda principernas räckvidd har mycken polemik förts bland statistikerna, varvid parterna väl mestadels haft olikartade tilllämpningar i tankarna. Den rätta avvägningen dem emellan blir givetvis en fråga om sunt omdöme i varje enskilt fall.

Såsom av det föregående framgått äro statistikernas problem, även i sina allmänna och teoretiska aspekter, endast delvis av rent matematisk art; specifikt sannolikhetsteoretiskt är egentligen blott problemet att bestämma de uppträdande samplefunktionernas fördelningar. Vid försöksplaneringen och vid valet mellan olika matematiska schemata spela en mängd allmänt naturvetenskapliga och filosofiska synpunkter in. I syfte att systematisera den statistiskt-experimentella metodiken har speciellt R. A. Fisher introducerat en mångfald av begreppsbildningar och termer, vilka till en början kunna synas den matematiske läsaren vaga och motbjudande. Småningom lär han sig emellertid att i dem se meningsfyllda utkristalliseringar av en djup forskarerfarenhet; och han konstaterar med respekt och beundran, att han står inför något, som kunde betecknas som en ny tankevetenskaps tillblivelse.

Litteratur.

Cramér, H., Mathematical Methods of Statistics. Uppsala 1945.
Fisher, R. A., Statistical Methods for Research Workers. 8. uppl., London o. Edinburgh 1941.
— The Design of Experiments. 3. uppl., London o. Edinburgh 1942.
Hoel, P. G., Introduction to Mathematical Statistics. New York 1947.
Matérn, B., Metoder att uppskatta noggrannheten vid linje- och provytetaxering. Medd. från statens skogsforskningsinst. *36*, 1947.
Palm, C., Intensitätsschwankungen im Fernsprechverkehr. Stockholm 1943.
Wald, A., Sequential Analysis. New York 1947.
Wold, H., A Study in the Analysis of Stationary Time Series. Uppsala 1938.

Syror och baser. II.

Referat av lektor G. STARCK, Stockholm.

Gilbert N. Lewis' elektronteori för syror och baser, för vilken en närmare redogörelse ställdes i utsikt i den första delen av detta referat (Elementa, dec. 1946), har fått en sammanfattande framställning i ett arbete av W. F. Luder och Saverio Zuffanti med titeln The Electronic Theory of Acids and Bases, New York 1947, som ligger till grund för nedanstående redogörelse.

Jag erinrar om att det för närvarande finnes fem olika sätt att definiera syror och baser och att de mer eller mindre korrekt kunna förknippas med följande forskares namn: 1) Arrhenius, 2) Franklin-Germann, 3) Lowry-Brönsted, 4) Usanovich, 5) Lewis.

1) Arrhenius' dissociationsteori betraktar förhållandena i vattenlösning och definierar syror och baser som ämnen, som innehålla lösningsmedlets elektrolytiska joner, dvs. vätejonen och hydroxyljonen.

2) Då nu vatten inte är det enda om ock det viktigaste lösningsmedel, som uppdelas i joner, så måste, om hänsyn tages även till andra lösningsmedel, den logiska utbyggnaden av Arrhenius' teori bli en syra-basteori, som betraktar lösningsmedlets joner som syra- resp. basbildande. Om sålunda vatten dissocieras i hydroniumjon och hydroxyljon, så dissocieras flytande ammoniak i analogi därmed i ammoniumjon och amidjon:

$$2\,H_2O \rightleftarrows H_3O^{+1} + OH^{-1},$$

$$2\,H_3N \rightleftarrows H_4N^{+1} + NH_2^{-1}.$$

Salmiak löst i flytande ammoniak är därför en syra, medan natriumamid är en bas; de båda ämnena neutralisera varandra enligt:

$$\begin{array}{lcl} NH_4Cl + NaNH_2 & \rightarrow & NaCl + 2\,NH_3, \\ \text{syra} + \text{bas} & \rightarrow & \text{salt} + \text{lösn.-medel.} \end{array}$$

Andra lösningsmedel äro koloxiklorid och svaveldioxid, av vilka det förra dissocieras enligt:

$$COCl_2 \rightleftarrows COCl^{+1} + Cl^{-1}.$$

Aluminiumklorid löst i flytande fosgen visar typiska sura egenskaper. Lösningen upplöser metaller under utveckling av CO och neutraliseras av metallklorider (»baser»), t. ex. $CaCl_2$. Man antager, att $AlCl_3$ med lösningsmedlet bildar en komplexjon enligt:

$$AlCl_3 + COCl_2 \rightarrow COCl^{+1} + AlCl_4^{-1},$$

varmed följer en ökning av fosgenets katjonkoncentration och ökade sura egenskaper. Lösningen kommer nu som sagt att lösa metaller, t. ex. Ca enligt:

$$Ca + COCl^{+1} \rightarrow Ca^{+2} + CO + Cl^{-1},$$

alldeles analogt med förhållandet i vatten:

$$Ca + 2\,H^{+1} \rightarrow Ca^{+2} + H_2.$$

Flytande svaveldioxid dissocieras i tionyljon och sulfitjon enligt:

$$2\,SO_2 \rightleftarrows SO^{+2} + SO_3^{-2}.$$

Ännu andra lösningsmedel, som äro undersökta i detta avseende, äro etanol, selenoxiklorid och antimontriklorid. Exempel på neutralisationer i dessa lösningsmedel utgöra följande reaktioner:

Lösn.-medel	**Syror**		**Baser**	**Salt**		**Lösn.-medel**
H_2O	H_3O^{+1}, Br^{-1}	+	K^{+1}, OH^{-1}	K^{+1}, Br^{-1}	+	$2H_2O$
NH_3	$NH_4{}^{+1}$, Br^{-1}	+	K^{+1}, NH_2^{-1}	K^{+1}, Br^{-1}	+	$2NH_3$
C_2H_5OH	$C_2H_5OH_2{}^{+1}$, Br^{-1}	+	K^{+1}, $OC_2H_5^{-1}$	K^{+1}, Br^{-1}	+	$2C_2H_5OH$
SO_2	SO^{+2}, $2Br^{-1}$	+	$2K^{+1}$, SO_3^{-2}	$2(K^{+1}$, $Br^{-1})$	+	$2SO_2$
$COCl_2$	$COCl^{+1}$, $AlCl_4^{-1}$	+	K^{+1}, Cl^{-1}	K^{+1}, $AlCl_4^{-1}$	+	$COCl_2$
$SeOCl_2$	$2SeOCl^{+1}$, $SnCl_6^{-2}$	+	$2(K^{+1}$, $Cl^{-1})$	$2K^{+1}$, $SnCl_6^{-2}$	+	$2SeOCl_2$
$SbCl_3$	Sb^{+3}, $3Br^{-1}$	+	$3(K^{+1}$, $Cl^{-1})$	$3(K^{+1}$, $Br^{-1})$	+	$SbCl_3$

3) Protonteorien enligt Lowry-Brönsted vill generalisera Arrhenius' åskådning genom att frigöra sig från beroende av vatten som lösningsmedel, men den gör det endast till hälften, i det den bibehåller det ena av de i teorien ingående elementen, nämligen vätejonen eller protonen. För att bli oberoende av lösningsmedlet måste man nu definiera baser på ett alldeles nytt sätt, nämligen som ett ämne som har egenskapen att upptaga protoner.

De nu anförda tre definitionerna måste enligt Lewis förkastas:

1) Arrhenius' — som onekligen är den mest logiska —, därför att den är för trång och endast gäller förhållandena i vattenlösning,

2) Lösningsmedelsteorien, därför att den begränsar syra-basfenomenen till lösningar och att den betonar jonisationen som en dominerande faktor,

3) Protonteorien såsom även den för trång, i det den fastlåser syrakaraktären vid förekomsten av ett enda ämne, protonen. Det finnes i verkligheten många syra-bassystem utan protoner.

Lewis' elektronteori för syror och baser, som han framlade redan 1923, är generellare och innefattar de tre föregående som specialfall. Han tog till grundval för sina definitioner fyra välbekanta experimentella kriterier. De äro:

1) Neutralisation: syror och baser skola mer eller mindre snabbt kunna förenas med varandra.

2) Titrering med indikatorer: syror och baser skola kunna titreras mot varandra med användning av vanligen färgade ämnen, s. k. indikatorer.

3) Utbytesreaktioner: syra eller bas kommer i allmänhet att skilja en svagare syra eller bas ur dess förening med ett ämne och ingå i dess ställe.

4) Katalys: syror och baser verka ofta som katalysatorer.

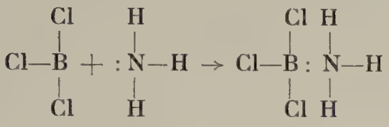
Alla fyra egenskaperna måste finnas för att man skall klassificera ett ämne som syra eller bas, men en koncis definition vinnes, om man särskilt betonar de båda första egenskaperna, neutralisation och titrering med indikator. Man kan då säga, att syror äro ämnen, som i likhet med klorväte neutralisera natriumhydroxid eller någon annan bas, medan baser äro ämnen, som i likhet med natriumhydroxid neutralisera klorväte eller någon annan syra. Många ämnen förena dessa egenskaper och kallas amfotera.

Dessa definitioner innesluta såväl Brönsteds som lösningsmedelsteorierna och givetvis också vattenteorien. Lewis' baser äro desamma som Brönsteds baser, och alla ämnen, som enligt lösningsmedelsteorien äro syror, äro det i detta system. Lewis har angivit ett enkelt försök, som illustrerar tillämpningen av hans definitioner. Om natriumhydroxid titreras med saltsyra i vattenlösning och med kristallviolett som indikator, är den sura lösningen gul, den basiska violett. Pyridin och trietylamin kunna likaledes titreras med saltsyra och äro således basiska. Om nu pyridin löses i ett tillnärmelsevis indifferent lösningsmedel som klorbensol, så erhålles samma violetta färg vid tillsats av kristallviolett. Det bör påpekas, att indikatorns färg förändras på samma sätt i alla lösningsmedel. Om nu bortriklorid eller stanniklorid sättas till pyridinlösningen, blir färgen gul. Bortriklorid och stanniklorid äro således syror. Tillsätter man nu trietylamin, aceton eller någon annan ej för svag bas, blir färgen ånyo violett.

Tydligen kunna dessa empiriska och samtidigt ganska vaga definitioner inte vara tillfyllest. Man måste finna den underliggande teoretiska grundvalen, den enhetliga synpunkten på fenomengruppen. Lewis sammanställer på ett mycket intressant sätt valenslära och teorien för syror och baser genom att identifiera reaktionen mellan syra och bas med uppkomsten av en kemisk bindning av visst slag. Lewis uttalar sålunda, att neutralisationen i första hand är en bildning av en koordinativ kovalensbindning och definierar syror på följande sätt. *En syra är ett ämne, som kan mottaga och dela ett i ett annat ämne ingående ledigt elektronpar; detta andra ämne, som i sin byggnad har ett ledigt (oupptaget) elektronpar, som det kan dela med syran, utgör en bas.* Resultatet av neutralisationen blir sålunda en koordinativ kovalensbindning, som framgår av följande exempel:

$$\mathrm{H^{+1}} + :\overset{..}{\underset{..}{\mathrm{O}}}:\mathrm{H^{-1}} \rightarrow \mathrm{H}:\overset{..}{\underset{..}{\mathrm{O}}}:\mathrm{H}$$

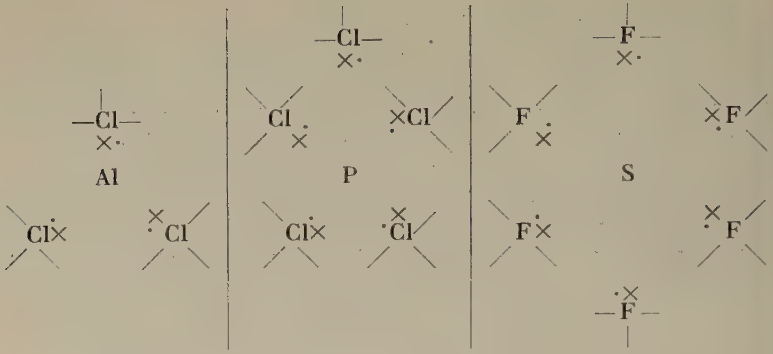
syra bas



$$\begin{array}{cccccccccccc} & \mathrm{Cl} & & & \mathrm{H} & & & & \mathrm{Cl} & & \mathrm{H} & \\ & | & & & | & & & & | & & | & \\ \mathrm{Cl}- & \mathrm{B} & + & : & \mathrm{N} & -\mathrm{H} & \rightarrow & \mathrm{Cl}- & \mathrm{B} & : & \mathrm{N} & -\mathrm{H} \\ & | & & & | & & & & | & & | & \\ & \mathrm{Cl} & & & \mathrm{H} & & & & \mathrm{Cl} & & \mathrm{H} & \end{array}$$

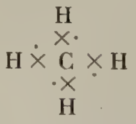
syra bas

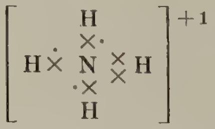
På grund av det härmed postulerade intima sambandet mellan valens och syra-baskaraktär måste Lewis tillse, att det finnes kongruens mellan de båda fenomengrupperna; det blir med andra ord nödvändigt att revidera den del av valensläran, som behandlar uppkomsten av kovalensbindningar. Detta område har länge behärskats av den s. k. åttaregeln eller oktettregeln, som emellertid numera är övergiven av de ledande valensforskarna. Åttaregeln tillskriver bildningen av kemiska föreningar grundämnenas strävan att bilda ett skal av åtta elektroner. Härpå ges många exempel även i elementära läroböcker. Lewis framhåller, att denna regel har en mycket begränsad giltighet. Man gör i allmänhet det felet att vid dess tillämpning endast betrakta grundämnen i de två eller tre första perioderna. Regeln gäller endast för de två första perioderna, H-He och Li-Ne, och inte ens där utan undantag. Som exempel må anföras bor, vars klorid är en typisk kovalent förening, men med 6 elektroner i stället för 8 (se formeln härovan, där varje valensstreck motsvarar ett delat elektronpar). Ju längre man går fram i det periodiska systemet, dess mer hopa sig undantagen. Som exempel härpå redan i den 3:e perioden må anföras aluminiumklorid, fosforpentaklorid och svavelhexafluorid, där de förenande elektronerna äro 6, 10 och 12, samtidigt som dessa ämnen äro typiska kovalensföreningar. (De centralatomen tillhörande elektronerna äro betecknade med ×, odelade elektronpar med valensstreck).



I jodheptafluorid finna vi en kovalensbindning med 14 elektroner, i osmiumoktafluorid (kokpunkt 47,3°) en med 16 elektroner. Bland komplexföreningarna och metallkarbonylföreningarna finner man likaledes ett stort antal avvikelser från åttaregeln. Förhållandet bekräftas eller rättare förutses av betraktelser över de spektralanalytiskt härledda elektronnivåerna, varpå här ej kan ingås.[1] Resultatet blir, att åttaregeln måste frångås; den ersättes nu av »tvåregeln», enligt vilken uppkomsten av såväl elektrovalenta som kovalenta föreningar beror på bildning av elektronpar i och för komplettering av ofullständiga elektronskal. I elektrovalensföreningarna äro de tillkommande elektronerna fria, i kovalensföreningarna stanna de kvar i det elektrongivande ämnet samtidigt med att de ingå i det elektronupptagande.

Den s. k. koordinativt kovalenta bindningen karakteriseras därav, att det elektronpar, som kompletterar en ofullständig elektronnivå, helt lämnas av det ena, det elektrongivande, av de reagerande ämnena. Skillnaden mellan kovalens och koordinativ kovalens framgår av följande formelbilder:


Kovalensbindning


Koordinativ kovalensbindning

Skillnaden ligger endast i det kompletterande elektronparets ursprung (1 + 1 resp. 2 + 0), inte i bindningens art, som är identisk. Det kunde därför synas överflödigt att införa en särskild term för kovalensbindningen i t. ex. ammoniumjonen, men det är å andra sidan tydligt, att man i fråga om den koordinativa bindningen kan i strängt figurlig bemärkelse tala om en viss polaritet mellan de båda parterna, i det endast den ena är givande men ej mottagande, medan vid kovalensbindningen båda parterna äro givande och mottagande. Just här finner man anknytningen till syra-basreaktionen. Den motsättning som råder mellan syra och bas avspeglas i skillnaden mellan de parter, som ingå en koordinativ kovalensförening, och dessa föreningars kemi är därför samtidigt enligt Lewis syrornas och basernas kemi.

---

[1] Inom parentes må här nämnas, att Luder och Zuffanti i sitt här refererade arbete ge en så vitt bekant helt ny uppställning av det periodiska systemet, som förefaller att vara den bästa och modernaste som sett dagen på senare tid.

Frågar man sig nu vilka ämnen som uppfylla villkoren för att kallas syror eller baser, så finner man en fyllig och brokig samling. I nedanstående tabell återfinnes ett antal syra-basreaktioner, dels utan, dels åtföljda av jonisation (i joniserande lösningsmedel). Tabellen vill samtidigt ge en jämförelse mellan de konkurrerande åsikterna på området. För övrigt måste en del viktiga konsekvenser av Lewis' teori förbigås.

Syra- basreaktioner, allmänna.

Reaktionens art	Syra	Bas	Reaktionsprodukt
Neutralisation			
Specialfall 1[1]	H^{+1}	OH^{-1}	HOH
» 2	$COCl^{+1}$	Cl^{-1}	$COCl_2$
» 3	HCl	NH_3	NH_4Cl
Elektronteorien täcker alla tre	Elektronparmottagare	Elektronpargivare	Bildning av koordinativ bindning
Andra exempel	BCl_3	$(C_2H_5)_3N$	$(C_2H_5)_3N \rightarrow BCl_3$
	$AlCl_3$	$(C_2H_5)_2O$	$(C_2H_5)_2O \rightarrow AlCl_3$
	SO_3	C_5H_5N	$C_5H_5N \rightarrow SO_3$
	CO_2	CaO	$CaCO_3$
	Ca^{+2}	OH^{-1}	$Ca(OH)_2$
	Ag^{+1}	NH_3	$Ag(NH_3)_2^{+1}$
Utbytesreaktioner			
En stark syra utdriver en svagare syra	BCl_3	Na_2CO_3	$CO_2 + Na_2O \rightarrow BCl_3$
	H^{+1}	$Al(OH)_3$	$Al^{+3} + HOH$
	H^{+1}	$Cu(NH_3)_4^{+2}$	$Cu^{+2} + NH_4^{+1}$
En stark bas utdriver en svagare bas	$C_5H_5N \rightarrow SO_3$	NH_3	$C_5H_5N + H_3N \rightarrow SO_3$
	$HC_2H_3O_2$	OH^{-1}	$C_2H_3O_2^{-1} + HOH$
	NH_4^{+1}	OH^{-1}	$NH_3 + HOH$

---

[1] Specialfall 1 betyder: enligt i vattensystemet gällande definition, specialfall 2, enligt lösningsmedelsteorien, specialfall 3, enligt Brönsted.

Syra- basreaktioner i joniserande lösningsmedel.

Reaktionens art	Syra	Bas	Reaktionsprodukt
Jonisation			
Specialfall 2	$AlCl_3$	$COCl_2$	$COCl^{+1} + AlCl_4^{-1}$
» 3	HCl	HOH	$H_3O^{+1} + Cl^{-1}$
Elektronteorien täcker båda	Elektronparmottagare	Elektronpargivare	Koordinationsbindning åtföljd av jonisation
Andra exempel (l betyder lösningsmedel)	CO_2	HOH (l)	$H^{+1} + HCO_3^{-1}$
	HOH (l)	NH_3	$OH^{-1} + NH_4^{+1}$
	HOH (l)	C_5H_5N	$OH^{-1} + C_5H_5NH^{+1}$
	BCl_3	$SeOCl_2$ (l)	$SeOCl^{+1} + BCl_4^{-1}$
	$SeOCl_2$ (l)	$(C_2H_5)_3N$	$Cl^{-1} + (C_2H_5)_3NSeOCl^{+1}$
Salthydrolys			
Reaktion: katjonsyra + lösn.medel, då anjonen är en svag bas, t. ex. Cl^{-1}	NH_4^{+1}	HOH	$H_3O^{+1} + NH_3$
	Zn^{+2}	HOH	$H^{+1} + ZnOH^{+1}$
Reaktion: anjonbas + lösn.medel, då katjonen är en svag syra, t. ex. Na^{+1}	HOH	CN^{-1}	$OH^{-1} + HCN$
	HOH	CO_3^{-2}	$OH^{-1} + HCO_3^{-1}$
Amfoterer			
Vatten är en amfolyt (kan giva eller taga elektronpar)	HOH	NH_3	$NH_4^{+1} + OH^{-1}$
	HCl	HOH	$H_3O^{+1} + Cl^{-1}$
Al-hydroxid är en amfolyt	$Al(OH)_3$	OH^{-1}	$Al(OH)_4^{-1}$
	H^{+1}	$Al(OH)_3$	$Al^{+3} + HOH$
Bildning av komplexjoner			
	Ag^{+1}	CN^{-1}	$Ag(CN)_2^{-1}$
	Cu^{+2}	NH_3	$Cu(NH_3)_4^{+2}$
	$SnCl_4$	Cl^{-1}	$SnCl_6^{-2}$
	As_2S_5	S^{-2}	AsS_4^{-3}

Elektrofila och elektrodota ämnen.

Det råder en påtaglig analogi mellan syror och oxidationsmedel. Den typiska inverkan av en syra på en metall är i själva verket ingenting annat än en oxidation:

$$\overbrace{Mg + 2H}^{2e}{}^{+1} \rightarrow Mg^{+2} + H_2 \quad \text{(i vatten)},$$

$$\overbrace{Ca + CO}^{2e}{}^{+2} \rightarrow Ca^{+2} + CO \quad \text{(i fosgen)}.$$

Lösningsmedlets syrakatjon verkar här som oxidationsmedel. På motsvarande sätt verka basiska anjoner vid inverkan på metalloider, t. ex.

$$\overbrace{2F_2 \;+\; 4OH^{-1}}^{4e} \rightarrow 4F^{-1} + O_2 + 2H_2O \quad \text{(i vatten)},$$

$$\overbrace{3J_2 \;+\; 6NH_2^{-1}}^{6e} \rightarrow 6J^{-1} + N_2 + 4NH_3 \quad \text{(i ammoniak)}.$$

Även vid en jämförelse med Brönsteds teori framträder denna analogi. Jämför t. ex. den protolytiska reaktionen:

$$\underset{\text{syra (1)}}{HCl} + \underset{\text{bas (2)}}{H_2O} \rightarrow \underset{\text{syra (2)}}{H_3O^{+1}} + \underset{\text{bas (1)}}{Cl^{-1}}$$

med redoxreaktionen:

$$\overbrace{\underset{\substack{\text{red.-}\\ \text{medel (1)}}}{Zn^{\circ}} \;+\; \underset{\substack{\text{oxid.-}\\ \text{medel (2)}}}{Cu^{+2}}}^{2e} \rightarrow \underset{\substack{\text{oxid.-}\\ \text{medel (1)}}}{Zn^{+2}} + \underset{\substack{\text{red.-}\\ \text{medel (2)}}}{Cu^{\circ}}$$

De ämnen, som deltaga i syra-, bas- och redoxreaktioner, delas i två klasser. *Elektrofila* kallas de som upptaga eller vinna elektroner vid reaktionen, *elektrodota*[1] de, som förlora eller dela med sig elektroner vid reaktionen.

Syror och oxidationsmedel äro elektrontagare. En syra får vara med och dela ett elektronpar, som tillhör en bas; ett oxidationsmedel upptar de elektroner, som avgivas av ett reduktionsmedel. Båda äro elektrofila och kunna i många fall verka antingen som syror eller som oxidationsmedel, t. ex. protonen:

$$\underset{\text{syra}}{H^{+1}} + :\underset{\cdot\cdot}{\overset{\cdot\cdot}{O}}:H^{-1} \rightarrow H:\underset{\cdot\cdot}{\overset{\cdot\cdot}{O}}:H$$

$$\overbrace{\underset{\substack{\text{oxid.-}\\ \text{medel}}}{H^{+1}} \;+\; Na^{\circ}}^{1e} \rightarrow Na^{+1} + \tfrac{1}{2}H_2 .$$

Baser och reduktionsmedel äro elektrongivare. En bas ger en andel i ett av sina elektronpar till en syra, ett reduktionsmedel förlorar elektroner till ett oxidationsmedel. Båda äro elektrodota och kunna i vissa fall verka antingen som baser eller som reduktionsmedel, t. ex. hydroxyljonen:

---

[1] Jämför det franska doter = giva, donera, engelska dotage = donation.

$$\underset{\text{bas}}{H:\underset{..}{\ddot{O}}:^{-1}} + H^{+1} \rightarrow H:\underset{..}{\ddot{O}}:H,$$

$$\overbrace{\underset{\substack{\text{red.-}\\ \text{medel}}}{H:O:^{-1}} \;+\; F_2}^{2e} \rightarrow 2F^{-1} + \tfrac{1}{2}O_2 + H_2O.$$

I nedanstående tabell upptas förteckningar över några viktiga elektrofila resp. elektrodota ämnen. Överst kommer det starkaste oxidationsmedlet resp. reduktionsmedlet, underst den starkaste syran resp. basen.

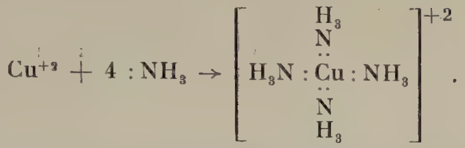
Elektrofila ämnen			*Elektrodota ämnen*		
Syror och oxid.-medel			Baser och red.-medel		
Antal mottagna elektroner			Antal avgivna elektroner		
	Delade (Syra)	Helt erhållna (Oxid.-medel)		Delade (Bas)	Helt avgivna (Red.-medel)
F_2		2	Cs		1
MnO_4^{-1}		5	Sn^{+2}		2
Cl_2		2	HCl	2	1
Sn^{+2}		2	J^{-1}	2	1
H_2O	2 , 4	2	$C_6H_4(OH)_2$	2 , 4	2
$C_6H_4(OH)_2$	2 , 4	2	$(C_2H_5)_2O$	2	?
SO_2	2 , 4		C_5H_5N	2	?
Ag^{+1}	2 , 4	1	H_2O	2	2
Cu^{+2}	8	1 , 2	CN^{-1}	2	1
H^{+1}	2	1	NH_3	2	3
CH_3COCl	2	?	$(C_2H_5)_3N$	2	?
HCl	2		S^{-2}	2 , 4 , 6	2
BF_3	2		NH_2	2	1
SO_3	2		OH^{-1}	2 , 4	

Bland syrorna finner man här positiva metalljoner, som man inte är van att förbinda med sura egenskaper. Icke desto mindre är t. ex. Ag^{+1} en syra, som mottager och delar elektronpar med baser som NH_3 eller CN^{-1}:

$$Ag^{+1} + 2\ :C:N^{-1} \rightarrow [N:C:Ag:C:N]^{-1},$$

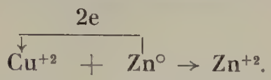
$$Ag^{+1} + 2\ \begin{matrix} & H & \\ : & \underset{..}{\ddot{N}} & :H \\ & H & \end{matrix} \rightarrow \left[\begin{matrix} & H & & H & \\ H: & \underset{..}{\ddot{N}} & :Ag: & \underset{..}{\ddot{N}} & :H \\ & H & & H & \end{matrix}\right]^{+1}$$

Likaså Cu^{+2} (4 elektronpar = 8 elektroner):



$$Cu^{+2} + 4\,:NH_3 \rightarrow \left[\begin{array}{c} H_3 \\ N \\ \cdot\cdot \\ H_3N : Cu : NH_3 \\ \cdot\cdot \\ N \\ H_3 \end{array}\right]^{+2}.$$

Samtidigt är Cu^{+2} ett oxidationsmedel, t. ex. gentemot Zn^0:



$$\overset{2e}{\overleftarrow{Cu^{+2} \quad + \quad Zn^{\circ}}} \rightarrow Zn^{+2}.$$

Titrering med indikatorer.

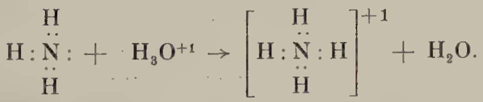
Följande experiment demonstrera några få av de många titreringar, som kunna utföras för att visa föreningars sura och basiska egenskaper.

1) I vatten. Indikator kristallviolett, löst i vatten.

Syror: HCl, HNO_3, H_2SO_4, $C_2H_3O_2H$. 10 ml vatten tages i vart och ett av 4 stora provrör, i varje rör dessutom 3—4 droppar indikator. Den violetta färgen blir gul vid tillsats av de uppräknade syrorna. Vid försiktigt arbete kan man iakttaga en grön mellanfärg. De gula lösningarna innehålla hydroniumjonen H_3O^{+1}, som är elektrofil.

Baser: NH_3, C_5H_5N, C_2H_5OH, 1,4-dioxan. Om några droppar av dessa ämnen sättas till var och en av de ovannämnda sura lösningarna, så förändras deras färg från gul till violett. Föreningarna äro baser, emedan de äro elektronpargivare och kunna bilda koordinativa kovalensbindningar med syrornas protoner.

Exempel:



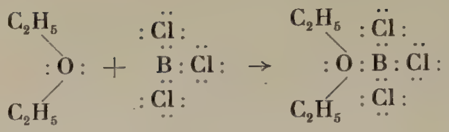
$$\begin{array}{c} H \\ \cdot\cdot \\ H : N : \\ \cdot\cdot \\ H \end{array} + H_3O^{+1} \rightarrow \left[\begin{array}{c} H \\ \cdot\cdot \\ H : N : H \\ \cdot\cdot \\ H \end{array}\right]^{+1} + H_2O.$$

2) I klorbensol eller koltetraklorid. Indikator kristallviolett, löst i klorbensol.

Syror: lösningar av HCl-gas och av BCl_3 i klorbensol (eller CCl_4), vattenfri $SnCl_4$. 10 ml klorbensol (eller CCl_4) tages i vart och ett av 3 provrör + 3—4 droppar indikator. Tillsats av ovannämnda ämnen ändrar den violetta färgen till gul. Ämnena äro elektronpartagare och därigenom syror.

Baser: etrar, fenol, syraanhydrider, alkoholer. Tillsats av dessa ämnen till de ovan erhållna sura lösningarna ger tillbaka den violetta färgen.

Exempel:



Bokanmälningar.

Paul Dubreil, *Algèbre*, Tome I, Équivalences, Opérations, Groupes, Anneaux, Corps. (Cahiers scientifiques, fasc. XX). Gauthier-Villars, Paris 1946, X + 305 s., 585 fr.

Sedan van der Waerden på 1930-talet utgav sin epokgörande Moderne Algebra, har utvecklingen inom den axiomatiska algebran gått i riktning mot allt vidare generalisering av grundbegreppen. Som exempel må endast nämnas att även icke-associativa operationer upptagits till behandling. Algebran har därvid kommit att alltmera ingående syssla med abstrakta mängder. En sammanfattande framställning av den axiomatiska algebran med utgångspunkt från dessa nyaste undersökningar är vad Dubreil har ställt som sin uppgift att ge i denna bok, vars första del nu föreligger. Det kan konstateras, att förf. löser denna uppgift på ett förnämligt sätt, i det han förenar logisk klarhet med pedagogisk framställningskonst. Som exempel härpå kan nämnas förf:s diskussion av gruppaxiomen och dessas oberoende av varandra, hans extraherande av det väsentliga i utvidgningen av de naturliga talen till ringen av (rationella) heltal, samt diskussionen om sambandet mellan den s. k. Teilerkettensatz och dennas substitut med hänsyn tagen till det omstridda urvalsaxiomet. — Ämnets abstrakta karaktär mildras genom de väl valda, konkreta exempel, varmed förf. belyser den löpande framställningen. Övningsuppgifter till den studerandes bruk (men ej nödvändiga för sammanhanget) finnas vid de olika avsnitten. — Verket utmärker sig vidare genom en väl genomförd nomenklatur; förf. försummar ej heller att ange de motsvarande tyska och engelska benämningarna i de fall då tveksamhet kan råda.

Utrymmet tillåter tyvärr ej en mera ingående presentation av verket. Av ovanstående torde framgå dess obestridliga värde för den som har anledning att använda modern algebra. I förordet skriver Gaston Julia: »Tout mathématicien fait, parfois sans le savoir, de l'Algèbre moderne». Läsekretsen bör sålunda bli mycket vid.

Stig Comét.

N. G. PARKE III, *Guide to the Literature of Mathematics and Physics Including Related Works on Engineering Science.* Mc Graw-Hill, New York 1947. Pp. 205, 25 s. net.

Denna bok är av utomordentligt stort värde för var och en som vill orientera sig inom något för honom obekant område av matematiken eller fysiken. Den kan rekommenderas både för den akademiker eller ingenjör, som i samband med vetenskapligt arbete behöver handböcker och monografier, och för den studerande, som önskar få upplysning om lämplig lärobok inom något särskilt område.

Författaren har under 150 rubriker uppfört titlarna på 2300 böcker och tidskriftsartiklar. Om man t. ex. slår upp rubriken »band spectra» finner man 29 boktitlar angivna och särskild uppgift om den senast utkomna monografien på området. Om vi fortsätta i bokstavsordning, finna vi under »bessel functions» 5 böcker, under »biophysics» 19 titlar och under »calculating machines» 10 titlar. Under »calculus-advanced» finnas icke mindre än 30 läroböcker upptagna, varvid författaren i fråga om differential- och integralkalkyl förutom Courants kända lärobok synes särskilt rekommendera den hos oss föga kända Burington och Torrances bok.

Urvalet av de angivna böckerna är gjort med stor omsorg. Den enda invändningen anmälaren kunnat göra är att några tyskspråkiga böcker utelämnats. Författarens omdömen och rekommendationer förefalla åtminstone i fråga om fysik anmälaren fullkomligt pålitliga.

Första hälften av boken upptas av allmänna betraktelser om hur man studerar ett ämne. För problemlösning i matematik och fysik anges lämpliga böcker. Värdefulla råd ges om hur man söker efter litteratur på ett bibliotek. *Einar Lindholm.*

LOUIS BRAND, *Vector and Tensor Analysis.* John Wiley & Sons, Inc., New York 1947, Pp. XVI + 439, $ 5.50.

Denna lärobok leder från den enklaste vektoralgebran fram till sådana delar av tensoranalysen som begreppen riemannsk och euklidisk rymd, krökningstensor o. a. Viktiga etapper på vägen äro vektorfunktioner av en skalär, resp. av en vektoriell variabel, med tillämpningar på dynamik, ett helt kapitel om hydrodynamik och ett om geometri på en yta. Uppläggningen synes i stort sett vara den traditionella och framställningssättet åskådligt och just så elegant, som redan ämnet i sig självt ger anledning till.

Stig Comét.

A. D. Michal, *Matrix and Tensor Calculus.* With applications to mechanics, elasticity, and aeronautics. (GALCIT[1] aeronautical series) John Wiley & Sons, Inc., New York 1947, Pp. XIII + 132, $ 3.00.

Boken, som bygger på en av förf. 1942—43 hållen kurs, är delad i två delar. Härigenom vill förf. markera, att matriskalkyl och tensorräkning innehållsmässigt äro helt skilda begrepp, även om de ömsesidigt influera. Kapitlen äro genomgående korta vilket underlättar läsningen. Ofta anges även mycket viktiga satser (t. ex. Cayley-Hamiltons) utan bevis, vilket nödvändiggöres av bokens avsedda ringa yttre omfång. Avsikten synes ha varit att ge en orientering, och såsom sådan är den intressant. Sålunda påpekar förf. (sid. 14) möjligheten att med hålkortsmaskin beräkna potensmatriser och därmed också den inversa till en given matris, kap. 7 ägnas åt en flygteknisk tillämpning av matriser, medan tensorkalkylen tillämpas på hydrodynamik och elasticitetslära. Den läsare, som önskar noggrannare intränga i ämnet, vägledes av en ganska rikhaltig bibliografi, dock begränsad till i huvudsak engelskspråkig litteratur. *Stig Comét.*

Georges Valiron, *Équations fonctionelles. Applications.* Masson & Cie, Paris 1945, 605 s., 600 fr.

Denna bok är en fortsättning av samme författares »Théorie des fonctions (Paris 1942)» och är avsedd att tillsammans med denna utgöra en »Cours d'analyse mathématique», som skall täcka hela den »elementära analysen» eller m. a. o. allt som kan betraktas som »klassiskt». Den skiljer sig emellertid både ifråga om innehållet och stoffets anordning på flera punkter avsevärt från föregångaren, »Cours d'analyse» av Goursat.

Detta band inledes med två ganska omfattande kapitel om algebraiska funktioner och Abelska integraler, ett d:o om analytiska funktioner av flera variabler och ett om teorien för kontakt och envelopper. Dessa teorier tillämpas sedan vid behandlingen av de ordinära differentialekvationerna, som upptaga huvuddelen av boken. Här observerar man, dels att kapitlet om singulariteter i det komplexa planet hos lineära differentialekvationer fått en ganska utförlig behandling, innefattande t. ex. en skiss av Painlevés resultat jämte några av Malmquists, dels att de i tillämpningarna viktiga olika fallen av lineära ekvationer av andra ordningen getts betydligt mera utrymme än hos Goursat. Lies teori skisseras, och i det kapitel som behandlar ekvationer i det reella fältet ges också en kort paragraf om Sturm-Liouvilles ekvationer.

---

[1] Guggenheim Aeronautical Laboratory, California Institute of Technology.

Efter ett kort kapitel över variationsräkning följer en ganska grundlig genomgång av differentialgeometrien, varpå boken avslutas med en översikt över de partiella differentialekvationerna. För ekvationerna av första ordning ges den klassiska teorien, medan ekvationerna av högre ordning representeras av exempel: Laplace's ekvation, värmeledningsekvationen. För de hyperboliska ekvationerna ges Riemanns integrationsmetod.

Valirons bok är utan tvivel en guldgruva av upplysningar och väl värd att ha på bokhyllan jämte Goursat's, som den kompletterar både genom den högre grad av modernitet den representerar och genom det annorlunda urvalet. Som framgår av ovanstående finns här utförligare behandlade åtskilliga kapitel, som fått en knapphändig utformning hos G. Stilen är utförd och tydlig, men frågan är om den kan mäta sig med Goursat's i klarhet och lättlästhet.

Göran Kjellberg.

Ragnar Nyhlén, *Förberedande kurs i geometri* (för klasserna 2^5 och 1^4), 19 s., kr. 0: 75.
—, *Lärobok i geometri* (för realskolor), V + 65 s., kr. 2: —.
—, *Tilläggskurs i geometri* (för ring R I), V + 18 s., kr. 0: 90.
Svenska Bokförlaget (Norstedts), Stockholm 1947.

Det har alltid föresvävat mig, att den framställning av skolkursen i plangeometri, som var att vänta från lektor Nyhlén, skulle innebära något av en revolution antingen i pedagogiskt avseende eller i fråga om geometriens principer (axiom m. m.). De nu utkomna, ovan nämnda böckerna (i fortsättningen betecknade F., L. och T., resp.) ha gjort mig besviken, vilket kanske delvis beror på denna förhandsinställning. Nu kunna naturligtvis böcker vara bra utan att innebära revolutionerande nyheter. Att finna normer för att bedöma böcker såsom mer eller mindre bra, är svårt, och i synnerhet gäller detta beträffande läroböcker. Huruvida genomsnittsbarnen komma att få lätt eller svårt för att lära sig geometri, beror i första hand på deras lärares förmåga att sätta sig in i deras tankevärld. Läroboken spelar i själva verket en jämförelsevis underordnad roll och anger blott det schema, som läraren har att i stort sett följa. Därför kommer jag inte att avge något värdeomdöme om de böcker, jag här har att anmäla, utan endast belysa några fall, där förf. avviker från mera traditionell behandling.

Den förberedande kursen har av förf. givits en överraskande abstrakt utformning. Sålunda användas transportörer för att konstatera sträckors resp. vinklars likhet. Låt vara, att det är av principiella skäl som förf. lanserar dessa instrument, men nog bli sträckornas och vinklarnas storlek mera påtagliga (det gäller fortfarande nybörjarna), om de uppmätas, anges med siffra och sort och därefter jämföras. — Att i skolans geometrikurs ej med ett ord anknyta vinkelbegreppet till åskådningen av en vridning, måste anses som ett allvarligt felgrepp. Alldeles speciellt i vår tid är, även för barnen, rotationen en påtaglig realitet, som det är nödvändigt att pedagogiskt utnyttja. I stället ger förf. i F. på sid. 3(!) Hilberts definition på vinkel, vilken i all sin matematiska oantastlighet sannerligen inte är någon läsning för småbarn. — Konsekvenserna bli i fortsättningen obehagliga. Det får räcka med att jag som exempel nämner satsen om medelpunkts- och periferivinklar på samma båge samt formeln för cirkelbågens längd; de kompliceras genom att endast vinklar mindre än 180° äro tillåtna.

Förf:s teori om parallella linjer är svårhanterlig. I vanligt språkbruk använder man ordet parallella för att ange att två räta linjer (gator, räls) gå åt samma håll, så att de ej råkas. Denna egenskap omnämnes först på sid. 12 i T. (med finstil, utan bevis) som avslutning på parallellteorien. Att två räta linjer, som med en transversal bilda lika alternatvinklar, äro parallella, tages av förf. som *definition* på parallellitet. Därigenom »slipper» man visserligen parallellaxiomet, men man får i stället ett konstlat »parallell»-begrepp. Det finns ett betydligt bättre, och jag skulle nästan vilja säga »renhårigare», sätt att undgå parallellaxiomets besvärligheter — helt enkelt hoppa över det, för att sedan ta upp saken vid repetitionen på gymnasiet. Hur man än gör, kan man inte avskaffa parallellaxiomets roll inom euklidisk geometri.

En del detaljer kan man också opponera sig mot. Figurerna triangel och cirkel uppfattas av förf. såsom blott och bart begränsningslinjer (F., sid. 6 och 14). Kroklinjer omnämnas ej, låt vara att de ej ha någon plats i den axiomatiska geometrien, men de böra dock uppställas som kontrast till räta linjer, för åskådningens skull. Angående kongruensfallen: Varför grundsats 8 (1:a kgrfallet) är en grundsats medan t. ex. satserna 1, 2 och 3 äro satser, måste förefalla dunkelt för eleverna; deras giltighet konstateras ju på samma sätt, nämligen med transportör. De bevis, som (i T.) ges för 2:a och 3:e kgrfallen (sats 8 och 9), äro svåra. Orsaken är den abstrakta uppfattningen av begreppet kongruens. — Pythagoras' sats presenteras helt anspråkslöst i en övningsuppgift (nr 54, sid. 39, L.) till kapitlet om ytor. Redan här borde denna sats ha fått en mera iögonenfallande utstyrsel, vilket den i läroboken ej får förrän i slutet av likformighetsläran.

I fråga om det formella kan anmärkas, att förf. ofta skriver linje i st. f. rät linje, till förfång för exaktheten, att sorten grader (°) ibland utelämnas, ibland inte (ex. sats 26: Summan av mätetalen för en vinkel och dess sidovinkel är 180. Men övn.-uppg. 31: En yttervinkel till en triangel är 102° etc.), att principen för satsnumrering ur hänvisningssynpunkt är opraktisk och f. ö. ej konsekvent genomförd (ingen kan t. ex. på förhand säga, i vilken eller vilka av böckerna sats 4 står att finna, eller veta, att sats 4 i F. är densamma som sats 10 i de övriga böckerna). Figurerna 25 och 26 (skjutmått och mikrometerskruv) i F. äro högst misslyckade, behäftade med flera grova felaktigheter.

Tyvärr var jag förhindrad att åhöra de föreläsningar (febr. 1944), vari förf. framlade sitt program för geometriundervisningen. Emellertid har jag en bestämd känsla av att han i de nu utgivna böckerna ej gör sina idéer full rättvisa. Denna känsla stärkes, då man läser de båda inledningskapitlen. De intentioner, som däri antydas, kunna ej anses förverkligade i den följande framställningen, vilken har en säkerligen ej åsyftad abstrakt karaktär. Geometriens konkretisering blir sålunda överlämnad till lärarens muntliga undervisning. I och för sig är detta visserligen ej något fel, men det torde illa överensstämma med vad förf. egentligen avsett. Beklagligt nog, skulle jag vilja säga. *Stig Comét.*

ABRAHAM WALD, *Sequential Analysis.* Wiley & Sons, New York 1947, Pp. 212, $ 4.00.

Vid övervakning av en tillverkningsprocess, s. k. kvalitetskontroll, brukar man vanligen taga ut ett fastställt antal tillverkade enheter ur ett parti och undersöka, om de hålla önskade dimensioner inom givna toleransgränser. Om detta icke är fallet, förkastas hela partiet eller undersökes noggrannare. En annan möjlighet är att taga ut enheterna på måfå *en efter en* ur partiet och avsluta prövningen, så snart man på grundval av de gjorda observationerna kan avge ett omdöme om partiet i positiv eller negativ riktning. Det visar sig, att regler för en sådan procedur kunna uppställas, som väsentligt nedbringa medelantalet prövade enheter per parti och därmed tillverkningskostnaderna, utan att kontrollen därigenom blir mindre effektiv än förut.

Dylika s. k. »sequential tests» användes under kriget i den amerikanska krigsindustrien och ha nu frigivits för publicering. Författaren, en välkänd amerikansk statistiker och själv upphovsman till den nya tekniken, diskuterar i denna bok klart och vederhäftigt metoden ur teoretisk synpunkt. Ett modernt specialarbete, som vittnar om att ett icke blott ekonomiskt betydelsefullt utan även teoretiskt givande område därmed införlivats med den matematiska statistiken. *Gunnar Blom.*

LEE DE FOREST, *Television Now and Onwards.* Hutchinson's Scientific & Technical Publications, 2nd Impr., London 1946, 176 sid., 16 s. Första amerik. (Dial Press, New York 1942) och eng. (London 1945) uppl. titel: *Television Today and Tomorrow.*

WILLIAM C. EDDY, *Television, The Eyes of Tomorrow.* Prentice-Hall, Inc., New York 1945, 330 sid., $ 3.75.

KINGDON S. TYLER, *Telecasting and Color.* Harcourt, Brace and Company, New York 1946, 213 sid., $ 2.75.

Dr De Forest, uppfinnare av elektronikens fundamentala instrument, trioden (»audionen»), och en av pionjärerna inom telefoni, radio, ljudfilm och television, torde inte behöva närmare presentation.

Hans föreliggande bok är skriven för ungdom. Han säger i första kapitlet: To the young — men and women, boys and girls — who intelligently are interested in the modern miracles amid which they live, have a desire to learn how scientist, inventor, and engineer have brought into actuality the most alluring, improbable vision ever conceived; to those who cleverly are curious regarding the texture of this wonder, soon to be commonplace, this volume is directed and dedicated.

Den svenske gymnasisten finner måhända, att boken inte är särskilt lättläst; den förutsätter goda förkunskaper och fordrar en hel del tankeansträngning, den är skriven på ett tämligen litterärt språk och innehåller ganska många »svåra ord». Men han får rikt utbyte av att läsa denna bok av en gammal vidsynt man, som varit med om mycket. De Forest behandlar inte bara televisionens tekniska sida utan diskuterar också temperamentsfullt dess samhälleliga konsekvenser, dess betydelse som nyhetsförmedlare, underhållnings- och propagandainstrument och dess betydelse för forskning (observation av t. ex. riskabla förlopp), uppfostran och undervisning.

Under kriget låg forskningsarbetet på televisionen nere. Televisionsteknikens män voro engagerade i utvecklingsarbeten inom andra för krigföringen viktigare områden av elektroniken. Men härunder framkom en hel del resultat, som sedan kunnat utnyttjas inom televisionstekniken. Denna har därför kraftigt utvecklats efter krigets slut. Åtskilliga tekniska svårigheter, som De Forest diskuterar, äro nu bemästrade. Ett icke betydelselöst hinder, motståndet från pressens, radions och filmens intressenter, som i televisionen ha trott sig se en farlig konkurrent, är nu till största delen övervunnet. Televisionen, mänsklighetens urgamla dröm, i mer än en mansålder föremål för systematisk forskning, är nu på väg att bli en storindustri.

Eddy och Tyler, bägge inom televisionen verksamma män, ta med lätt hand på de fysikaliska och tekniska principerna och behandla i stället utförligt och intressant de »praktiska» problemen, såsom studio-, upptagnings- och sändningsteknik, samt de industriella, kommersiella och sociala aspekterna. Bägge böckerna innehålla ett rikt bildmaterial. *Torsten Jönsson.*

JOHN MILLS, *Electronics, Today and Tomorrow.* D. Van Nostrand Company, Inc., New York 1944, 178 sid., $ 2.25.

DONALD MCNICOL, *Radio's Conquest of Space, The Experimental Rise in Radio Communication.* Murray Hill Books, Inc., New York 1946, 374 sid., $ 4.00.

ORRIN E. DUNLAP JR, *Radar, What Radar Is and How It Works.* Harper & Brothers, New York 1946, 208 sid., $ 2.50.

RALPH G. HUDSON, *An Introduction to Electronics.* The Macmillan Company, New York 1946, 97 sid., $ 3.00.

Författarna till de tre första böckerna höra till radioteknikens veteraner, och de äro alla tre framstående popularisatorer med ett flertal böcker bakom sig.

Mills var ursprungligen lärare; han har tillsammans med R. A. Millikan utgivit en på sin tid ganska mycket använd lärobok i fysik. Under första världskriget skrev han en radiosignalistinstruktion för användning inom U. S. A.:s krigsmakt, och därefter har han framgångsrikt ägnat sig åt populärvetenskaplig författar- och föreläsningsverksamhet.

McNicol var verksam som vad vi nu kalla radioingenjör redan i början av detta århundrade. Han har vid sidan av sin omfattande verksamhet som praktiker, lärare och publicist intresserat sig mycket för den elektriska kommunikationsteknikens historia och förhistoria.

Dunlap Jr var tidigare »radioredaktör» i The New York Times. Han är livligt intresserad av lärdomshistoria (eftersom elektroniken är en av de populära avkomlingarna till den fruktsamma men tyvärr inte så populära fysiken, anser sig rec. oförhindrad att räkna elektronikens historia till lärdomshistorien), och en av hans mest berömda böcker är *Radio's 100 Men of Science, Biographical Narratives of the Pathfinders in Electronics and Television* (New York 1944, $ 3.50). I sin bok om radar ägnar han också mycket utrymme åt att visa, att radar inte är en uppfinning utan en produkt av ett par generationers forskning.

Dessa tre inspirerande böcker ge en klar uppfattning såväl om värdet av äldre fysikers, teknikers och även lekmäns forsknings- och experimentarbete som om de enorma möjligheter på gott och ont, som fysikens dotterdisciplin, elektroniken, erbjuder mänskligheten, möjligheter, vilkas utnyttjande ännu befinner sig på begynnelsestadiet.

Enligt rec:s mening äro dessa böcker (och alldeles särskilt Mills' och Dunlaps) lämpade som premieböcker åt elever i de två högsta ringarna. Yngre elever torde inte kunna läsa dem med full behållning; visserligen förekomma inga matematiska utredningar, men kunskaper i elektricitetslärans element äro nödvändiga. Att böckerna äro skrivna på engelska bör inte få avskräcka. Det är för oss helt enkelt en nödvändighet, att vår ungdom lär sig att utnyttja den rika anglosachsiska litteraturen.

Författaren till den fjärde boken, Hudson, är professor i elektroteknik vid MIT; han har utgivit ett flertal läroböcker och handböcker. Det föreliggande rikt illustrerade arbetet behandlar i klar och lättfattlig form grunderna av elektroniken samt några av de vanligaste praktiska tillämpningarna. För att man skall kunna tillgodogöra sig framställningen till fullo, äro kunskaper i fysik, motsvarande realgymnasiets kurs, erforderliga.

Torsten Jönsson.

RICHARD M. SUTTON, *Demonstration Experiments in Physics.* McGraw-Hill Book Company, Inc., New York 1938, Pp. 545, $ 4.50.

Denna bok innehåller beskrivning av inte mindre än 1189 fysikaliska demonstrationsexperiment. Den tillkom för tio år sedan genom att medlemmarna i American Association of Physics Teachers ombads insända sina bästa experiment, varvid bidrag erhölls från mer än 200 medlemmar. Boken är sålunda inte ny, men genom sitt utomordentliga värde för varje fysiklärare är den väl förtjänt av en senkommen recension.

Experimenten fördela sig på de olika grenarna av fysiken på följande sätt: mekanik 328, akustik 153, värme 182, elektricitet 269, optik 136, atomfysik 121. Experimentens svårighetsgrad är varierande. Ett mycket stort antal av dem lämpa sig för gymnasiet. Som exempel kan nämnas, att de första 18 experimenten i boken, vilka illustrera kraftparallellogrammen, samtliga utan svårighet böra kunna utföras i första ringen, enär det dyrbaraste i apparatväg utgöres av några dynamometrar och en fläkt. Fläkten användes vid tillämpning av kraftparallellogrammen på en segelbåt, som man kan bygga av en kork, en plåtbit, en spik och en pappbit och som sedan får kryssa i en skål med vatten. För övrigt gäller för många av de angivna experimenten, att den erforderliga apparaturen är mycket enkel. — Andra experiment äro mera lämpade för tvåbetygsundervisningen vid universiteten eller kanske som enskilt arbete.

Beskrivningen av varje experiment är förhållandevis kortfattad. Det har ju visat sig, att allt för utförliga beskrivningar av demonstrationsapparater äro av föga värde, ty man har ändå nästan aldrig möjlighet eller tid att i alla detaljer följa anvisningarna. I gengäld åtföljas många beskrivningar av en kort förklaring till fenomenet eller en kort anvisning hur läraren skall kunna göra experimentet mera intresseväckande. *Einar Lindholm.*

PAUL WESSEL, *Physik für das Studium an technischen Hochschulen und Universitäten und zum Gebrauch in der Praxis.* Utg. av V. RIEDERER VON PAAR. Ernst Reinhardt Verlag, München 1938, 75:e tusendet 1947, 560 sid., Schweiz. Fr. 9,50.

Detta förtjänstfulla arbete, skrivet av en erfaren ingenjör och lärare, är nu åter tillgängligt. Boken är ingen lärobok i vanlig mening utan snarare ett kompendium. Den är överskådligt uppställd, knapphändig men klar, och synnerligen innehållsrik. Framställningen är ställvis kanske väl gammalmodig. Den matematiska behandlingen är genomgående onödigt elementär (differential- och integralkalkyl användes inte alls). Boken innehåller många och goda figurer samt en värdefull tabellsamling, som dock behöver revideras något. Arbetet kan varmt rekommenderas som en behändig uppslags- och repetitionsbok i elementär fysik.

Torsten Jönsson.

TORE PHILIPSON, *Preparativ oorganisk kemi.* Handledning vid laborationsövningar. Almqvist & Wicksell, Uppsala 1947. 158 s. Kart. kr. 5: 50.

Den bästa delen av boken är kapitlet »Kemiska arbetsmetoder», som upptar de första 65 sidorna. Det innehåller många riktiga — och viktiga — observanda till efterrättelse för nybörjaren. Tyvärr hör nog denna del av de praktiska handledningarna till det som överhoppas i ivern att få ta itu med det manuella arbetet, men hur mycken tid och energi och hur mycket överflödigt assistentarbete skulle inte sparas, om man ville sätta sig in i arbetsmetoderna, innan man börjar arbetet eller om man åtminstone under arbetets gång sökte råd och upplysning i inledningskapitlen.

Boken är en ny utgåva av Oscar Widmans gamla Handledning, som väl egentligen var avsedd för noviserna på universitets- och högskolelaboratorierna, men som på grund av uppgifternas enkelhet även användes vid de på den tiden frivilliga laborationsövningarna i gymnasiet. Mycket av det gamla materialet finnes kvar, utökat likvisst bl. a. med en avdelning metalloidsynteser. Om urvalet säger förf. avväpnande, att det kan diskuteras, och det är ju sant. En hel del förefaller väl enkelt även för nybörjare vid ett universitet; förf. har bestämt inga höga tankar om den förberedelse i experimentalkemi, som realgymnasiet vill meddela.

Några sakliga anmärkningar kunna ej undertryckas. De gälla särskilt de löslighetsvärden, som meddelas. Vederhäftiga tabellverk ange endast löslighet i gram saltanhydrid per 100 g vatten eller 100 g lösning jämte bottenfasens sammansättning, aldrig lösligheten av salthydrat. Det gör däremot författaren, som emellertid konsekvent synes ha beräknat lösligheterna ur de »anhydriska» värdena genom multiplikation med faktorn: salthydrat/anhydrid utan hänsyn till det vatten, som hydratet innehåller. Därför äro praktiskt taget alla de meddelade lösligheterna för kristallvattenhaltiga salter oriktiga. En inkonsekvens må dock annoteras; på sid. 82 anges lösligheten för $BaCl_2, 2H_2O$ vid 20° vara 36 g/100 g vatten. Siffran är riktig men gäller vattenfritt salt.

De två första rubrikerna under Natrium äro Natriumhydroxid och Natriumsalter. Är inte natriumhydroxid ett salt i Uppsala? — Natriumjodid (sid. 72) har formeln $NaJ, 2H_2O$ mellan $-13{,}5°$ och $+65°$. — Förklaringen till att viktsökningen vid klorkalkframställning (sid. 81) inte blir den »teoretiska» eller 7 g per 10 g släckt kalk torde inte vara karbonathalt av kalciumhydroxiden utan det förhållandet, att reaktionen delvis är en annan än den förf. implicite antager. Man får också räkna med att en del av det bildade vattnet stannar kvar i reaktionsprodukten. — Vid framställning av BaO_2, varför inte använda syrgas, som numera finnes tillgänglig även i ganska enkla institutioner? — Brunsten som utgångsmaterial för manganföreningar är en relikt från den tid då metallen var okänd som lätt tillgänglig handelsvara. — Namnet på berlinerblått borde man kanske försiktigare skriva Kaliumjärn (III eller II) hexacyanoferrat (II eller III), eftersom skäl kunna anföras även för den alternativa formuleringen. Då blir formeln försiktigtvis $KFeFe(CN)_6$ utan angivande av laddningar. — Den nya nomenklaturen är väl ej konsekvent genomförd; svavelmonoklorid för S_2Cl_2, kvävetrioxid för N_2O_3, kaliumjärnoxalat för $K_3Fe(C_2O_4)_3$ kan inte gärna stämma med kommittéförslaget, som jag visserligen inte har tillgängligt just nu. — På sid. 145 »nedsmältes diametern» på ena änden av ett förbränningsrör. Efter något funderande förstår man att röret skall utdragas och förträngas till 7—8 mm, men om man har någon erfarenhet av svårsmält glas, så vet man också, att man måste löda till ett glasrör av samma vidd för att få tillräcklig godstjocklek.

Som handledning vid preparativt arbete i gymnasiet t. ex. för enskilt arbete kan boken givetvis komma till användning. Utom den ovan påpekade förtjänsten har den ytterligare en stor förtjänst, nämligen att vara skriven på svenska. Ingen ledare av laborationsövningar i skolan, som kräva hänvisning till utländsk litteratur, har väl kunnat undgå att förvånas — och förargas — över motsträvigheten mot och den bristande förmågan att läsa enkel, teknisk text på främmande språk. *G. Starck.*

JULES GUÉRON, *Réactions bimoleculaires I.* Actualités scientifiques et industrielles Nr. 805, Hermann & Cie, Paris 1939, 86 s., 110 fr.

En författare, som på ett litet utrymme skall skildra ett stort forskningsområde, kan välja en av två vägar, om han skall göra framställningen njutbar för en intresserad icke-specialist. (Vi bortse från möjligheten att till varje pris söka »få med» så mycket som möjligt av fakta och teori, något som ofelbart leder till oläsbarhet.) Antingen kan han göra en bred översikt över hela ämnet utan att någonstädes gå in på detaljer. Eller också kan han efter en allmän översikt välja ut några avgränsade frågor och genomgå dessa grundligt.

Guéron har gått den senare vägen, och det på ett mycket tilltalande sätt, när han velat skildra tvåmolekylära förlopp. Ett inledande kapitel dryftar olika sätt att bestämma molekyldiametrar. Därpå skildras teoretiska försök att behandla reaktionshastighetens temperaturberoende, från Arrhenius' välkända enkla formel till de något mer invecklade teorier som framställts av Hinshelwood och Kassel. Det sista allmänna kapitlet handlar om matematiska metoder att ur försöksdata bestämma ordningen av en reaktion.

Därpå följa de särskilda förlopp som Guéron valt att granska närmare: sönderfall och bildning av HJ, omvandling av paraväte till ortoväte (spontant eller påskyndat av tillsatta ämnen) och reaktionen mellan H_2 och D_2 till HD.

Vid varje reaktion genomgås i korthet de mätmetoder som använts och jämföras olika forskares mätningar. Bl. a. dryftas möjligheten till störningar genom väggkatalys. Mycket lärorikt är avsnittet om Bodensteins mätningar av HJ:s sönderfallshastighet vid olika temperaturer och de försök som gjorts att passa in hans mätvärden i olika teoretiska formler. Man ser här hur stor försiktighet som fordras, när de skillnader man diskuterat ligga på gränsen till mätfelen.

Den som ej blott vill få vetenskapens resultat serverade färdiga utan även vill ha en inblick i den möda som ligger bakom och den kritiska anda som är nödvändig vid tolkningen av försöksresultat, han bör i Guérons bok finna en underhållande läsning.

L. G. Sillén.

HÅKON FLOOD, *Kjemi, riss av kjemien og dens anknytning til teknikk og industri.* Grøndahl & Søns forlag, Oslo 1946, 463 s., kr. 13: 50.

Denna omfångsrika bok är avsedd främst för »bygnings-, elektro- og maskinavdelingens studerende» vid Norges Tekniske Høgskole och är därför en direkt påbyggnad på den norska kemikursen till studentexamen. Den svenska gymnasiekursen är avsevärt större, varför motsvarande svenska undervisning vid avdelningarna F (M, S, E och V) vid Tekniska högskolan har kunnat läggas som en föreläsningskurs i rent fysikalisk kemi.

Docent Floods bok är väl upplagd. Den inledes med en sammanhängande framställning av de fysikalisk-kemiska lagarna, varefter följer en avdelning oorganisk kemi och ett mindre avsnitt organisk kemi. Något av det värdefullaste i boken är det sista avsnittet med 27 artiklar »Fra den anvendte kjemi», där med talrika hänvisningar till bokens text Norges kemiska industrier belysas av respektive fackmän. Man kan märka, att samarbetet och växelverkan mellan teknikerna och författaren varit givande. Den kemiska och teoretiska grunden för en fabrikation finner man naturligt insprängd i bokens text — i specialartikeln komma sedan de tekniska synpunkterna, produktionssiffror, provmetoder osv.

Den oorganiska kemien är utförligt (200 s.) och översiktligt behandlad, och den nya nomenklaturen är genomgående tillämpad. Vid framställningen av de olika elementens kemi följer förf. i stort sett det periodiska systemet. Det oorganiska avsnittet är väl tillrättalagt för bokens ändamål. Det ger en fyllig framställning och innehåller allt väsentligt utan att vara överlastat av detaljer. — Framställningen av den organiska kemien är ganska knapphändig (46 s.) och förhållandevis starkt tekniskt betonad.

»Fra den anvendte kjemi» är synnerligen intresseväckande. Här passerar Norges kemiska industri revy, och naturligt nog dominerar den direkt eller indirekt elektrokemiska industrien med nära hälften av artiklarna. Av stort intresse hade det varit att få del av några uppsatser om valfångsten och trankokerierna samt om konservindustrien, som väl få räknas till Norges viktigaste industrier.

Boken är avsedd att läsas utan beledsagande laborationer, vilket ur allmän kemisk undervisningssynpunkt sett är en styggelse.

Konsten att lära sig kemi enbart ur böcker är ej allom given, men man får lyckönska eleverna i Trondheim att de ha fått en så god och pedagogiskt väl upplagd bok till sitt förfogade.

Axel Scholander.

RUDOLPH MACY, *Organic Chemistry Simplified.* Chemical Publishing Co., Brooklyn 1944, 431 s., kr. 15:—.

Den på ett ovanligt behagligt papper tryckta boken behandlar kolatomens säregna ställning inom kemien, kolföreningarnas arkitektur och indelning samt några särskilt intressanta grupper av organiska substanser, såsom isopren, äggviteämnen, kolhydrater, färgämnen, droger, hormoner, vitaminer, isotopkemi och jättemolekyler.

Den utomordentligt välskrivna framställningen utgår från elektron- och valensteorien och nalkas försiktigt de olika begreppen och facktermerna, som klarläggas omsorgsfullt, stundom i humoristiska vändningar och i förening med utomordentliga illustrationer. På ett beundransvärt sätt framläggas teorierna för de organiska ämnenas egenskaper och reaktioner som följder av elektronbyggnaden, vilket gör studiet av boken till en intellektuell njutning. Läsaren, som vid bokens början ej behöver veta något alls om organisk kemi, finner vid dess slut att denna eljest ganska tillkrånglade del av kemien egentligen är en kristallklar och beundransvärd byggnad av största skönhet.

Undertecknad har aldrig läst en mera spännande bok i organisk kemi. Den rekommenderas till varje kemilärare.

E. Nordefeldt.

FERNELIUS-GARRETT-QUILL, *Fundamentals in Chemistry for the Laboratory, Complete Course,* Ginn and Co., Boston 1946, 360 s., kr. 13:—.

Bokens innehåll motsvarar mer än väl vår studentkurs på reallinjen och behandlar alla områden av denna. Det uppdelas på ett 30-tal kapitel, omfattande sammanlagt ett 90-tal experiment eller utredningar, stundom både experimentellt och teoretiskt av ganska krävande art. Även rent teoretiska kapitel, såsom radioaktivitet, atomstruktur, elektrovalens och kovalens, förekomma. Vid varje experiment skola protokoll ifyllas och frågor besvaras, och ofta äro de kvantitativa undersökningarna duplicerade för att undanröja tillfälliga felkällor.

Boken synes lämplig vid utbildning av kemilärare för realskolor och gymnasier, och för intellektuellt begåvade gymnasister kan den bli en själslig katalysator av hög rang. En ambitiös lärare finner i boken många goda uppslag och synpunkter.

Periodiska systemets karta på bokens sista sida störes tyvärr av att de röda nummersiffrorna vid övertryckningen blivit i viss utsträckning felplacerade. *E. Nordefeldt.*

E. Darmois, *L'Activité des solutions électrolytiques.* Actualités scientifiques et industrielles Nr. 945, Hermann & Cie, Paris 1943, 58 sid., 40 fr.

Inom den trånga ramen av 58 sidor har författaren lyckats ge en ingående, klar och lättläst framställning av läran om jonaktivitet och några av dess konsekvenser, såsom elektrolytlösningarnas osmotiska tryck och kryoskopi, teorien för koncentrerade lösningar, Brönsteds teori för specifik jonverkan o. a. *G. Starck.*

Recensenter i detta häfte: fil. kand. G. Blom, Stockholm; förste aktuarien S. Comét, Stockholm; t. f. laborator T. Jönsson, Göteborg; fil. kand. G. Kjellberg, Stockholm; docent E. Lindholm, Stockholm; lektor E. Nordefeldt, Stockholm; civiling. A. Scholander, Stockholm; docent L. G. Sillén, Stockholm; lektor G. Starck, Stockholm.

Tidskrifter.

IVA, 1947: 2—4.

Ur innehållet: Reduktionsförloppet i en vedgasgenerator; Kunskapsförmedling till industriens tjänst; Om teknikens humanisering; Reten — ett skandinaviskt kolväte; United Nations Educational Scientific and Cultural Organisation (UNESCO) och dess uppgifter; Atomkommitténs betänkande II; Upplysningar om IVA:s instrumentkatalogbibliotek.

Ljuskultur, 1947: 2—3.

Ur innehållet: Edelgasser, oversikt over deres fremstilling, egenskaper og anvendelse; Belysningens utveckling i Storbritannien; Blixtör; Skolornas elbelysning; Lampblixten, fotoreportagets viktigaste ljuskälla.

Populär radio, 1947: 10—11.

Ur innehållet: Televisionen i U. S. A.; Automatisk bandbreddsreglering; Rörvoltmeter för likspänningsmätning; Topografiens inverkan på metervågornas utbredning; Signalgenerator för laboratoriebruk.

Ericsson Review, 1947: 1—4.

Ur innehållet: Nya trafikmätare för telefonanläggningar; Mätning av pH och redoxpotentialer; En metod för beräkning av spårledningar; Automattelefonens utveckling i Sverige; Ny bordapparat för automatiskt system; Ny järnvägstelefonväxel vid Stockholms central; Växelströmskompensator.

Nordisk Astronomisk Tidsskrift, København 1947: 2—3.

Ur innehållet: Julie M. Vinter Hansen, Elis Strömgren; B. Lindblad, Elis Strömgren; Julie M. Vinter Hansen, Kometernes fysiske Struktur; F. Hjerting, Solens Granulation; D. M. Menzel, Radar og Astronomien; E. V. Petersen, Om Amatørastronomernes Problemer; Ch. V. Strain, Solspektroskopi i store Højder.

Forts. s. 254.

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

1545) *Om* x, y *och* z *äro positiva tal, finnes ingen triangel, vars sidor ha längderna* $(1+x^2)(y-z)^2$, $(1+y^2)(z-x)^2$ *och* $(1+z^2)(x-y)^2$. X.

1546) *Man uppritar de parabelbågar som tangera en triangels sidor två och två i sidornas icke gemensamma ändpunkter. Dessa bågar uppdela triangelns inre i sju områden. Sök förhållandena mellan dessa områdens areor.* X.

1547) *En rät linje genom en tetraeders tyngdpunkt* T *skär sidoytorna eller deras förlängningar. Tag* T *som origo och inför en positiv riktning på linjen. Om koordinaterna för skärningspunkterna äro* x_1, x_2, x_3 *och* x_4, *så gäller* $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=0$. *N. J.*

Enklare matematiska uppgifter.[2]

1548) Lös systemet $yz = ax + b$, $zx = ay + b$, $xy = az + b$.

Svar: $x_1 = y_1 = z_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$; $x_2 = y_2 = z_2 = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$; $x_3 = a - \frac{b}{a}$, $y_3 = z_3 = -a$; $x_4 = -a$, $y_4 = a - \frac{b}{a}$, $z_4 = -a$; $x_5 = y_5 = -a$, $z_5 = a - \frac{b}{a}$.

1549) Lös ekvationen $1 : (2 \sin x - 1) = 1 + 2 \sin 3x$.

Svar: $45° + n \cdot 90°$, $54° + n \cdot 360°$, $126° + n \cdot 360°$, $198° + n \cdot 360°$, $342° + n \cdot 360°$.

1550) I ett parallelltrapets är den ena basen dubbelt så stor som den andra. I trapetset kunna inpassas två med baserna parallella linjer, som delas i tre lika delar av trapetsets diagonaler. Hur många procent av trapetsets yta ligger mellan dessa linjer?

Svar: 27 %.

---

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 1548 insänd av *N. J.*, 1549—1550, 1557—1558 av *P.-G. Ljungfors*, 1551—1556 av *X.*

1551) I en cirkel med radien R är inskriven en triangel ABC med ytan T. Höjden AA_1 drages, och normalerna A_1P mot AC och A_1Q mot AB fällas. Beräkna PQ.
Svar: $T : R$.

1552) Linjerna $y = kx + l$, $y = kx + l + a$, $y = (k + c)x + m$, $y = (k + c)x + m + b$ bilda en parallellogram. Beräkna dess yta.
Svar: $\left|\frac{ab}{c}\right|$.

1553) I triangeln ABC är M mittpunkten av sidan AB. Triangeln MBC vrides 90° kring M till läget MC_1B_1, varvid $C \rightarrow C_1$ och $B \rightarrow B_1$. Visa, att mittpunkterna av sidorna i fyrhörningen ACC_1B_1 utgöra hörnen i en kvadrat.

1554) O är origo i ett rätvinkligt axelsystem och A den punkt på x-axeln, vars x-koordinat är 6; B är en punkt på 3 enheters avstånd från origo. Man uppritar den cirkel genom O och A som tangerar OB och den cirkel genom O och B som tangerar OA. Dessa cirklar råkas utom i O även i C. Sök orten för denna punkt, när OB vrider sig kring O.
Svar: Cirkeln $(x + 2)^2 + y^2 = 16$.

1555) Linjerna AB, BC och CA tangera en parabel med brännpunkten F och styrlinjen s. Linjen genom A parallell med BC skär s i A_1, linjen genom B parallell med CA skär s i B_1 och linjen genom C parallell med AB skär s i C_1. Man konstruerar A_2, B_2, C_2 så, att A är mittpunkt till A_1A_2, B till B_1B_2, C till C_1C_2. Visa, att A_2, B_2, C_2 och F ligga i rät linje.

1556) Sök orten för skärningspunkten mellan de tangenter till kurvorna $y^2 = (x + 1)^3$ och $y^2 = (x - 1)^3$, som ha vinkelkoefficienterna k resp. $-k$, när k varierar.
Svar: $4y^2 = 27x$.

1557) Sök ekvationerna för de tangenter till kurvan $y(x^2 + x + 1) = x^2 + 1$ som gå genom maximipunkten.
Svar: $y = 2$; $x + y = 1$; $x - 3y = -7$.

1558) Fyrhörningen $ABCD$ är inskriven i en given cirkel. Sidorna AB och CD äro lika stora. Diagonalen AC är d. Sök maximum av fyrhörningens yta.
Svar: $d^2 : 2$.

Lösn. till uppg. 1517—1519.

1517) *Sidan i en liksidig triangel är a. Beräkna sidan i den triangel som begränsas av a) de gemensamma yttre tangenterna* *till de vidskrivna cirklarna, b) de gemensamma kordorna till dessa cirklar och den omskrivna cirkeln. Kanten i en regelbunden tetraeder är a. Beräkna kanten till den tetraeder som begränsas av c) de yttre tangentplanen till de vidskrivna sfärerna, d) planen för sektionerna mellan dessa sfärer och den omskrivna sfären.*

N. J.

Om den inskrivna cirkelns radie i den givna triangeln kallas r, så äro de om- och vidskrivna cirklarnas radier $2r$, resp. $3r$. Den inskrivna cirkelns radie i den i första fallet nämnda triangeln blir $5r$ och svaret $5a$. Om den inskrivna cirkelns radie till den i andra fallet nämnda triangeln kallas $\bar{r}$, så erhålles $4r^2 - \bar{r}^2 = 9r^2 - (4r - \bar{r})^2$, varav $\bar{r} = \frac{11r}{8}$ och svaret $\frac{11a}{8}$. För tetraedern äro med analoga beteckningar de om- och vidskrivna sfärernas radier $3r$, resp. $2r$. Den omskrivna sfären går genom de vidskrivna sfärernas medelpunkter, som med tetraederns hörn bilda en kub. Avståndet från tetraederns »centrum» till linjerna genom medelpunkterna är r och till tangentplanen $3r$, varav svaret $3a$. I sista fallet erhålles $9r^2 - \bar{r}^2 = 4r^2 - (3r - \bar{r})^2$, varav $\bar{r} = \frac{7r}{3}$ och svaret $\frac{7a}{3}$.

Löst av *N. G. Sjöstrand, J. A. Sandelin.*

1518) *I triangeln ABC tangerar den inskrivna cirkeln resp. sidor i* A_1, B_1, C_1. *Visa, att* $\overline{AA_1}^2$, $\overline{BB_1}^2$, $\overline{CC_1}^2$ *bilda en aritmetisk serie, om* h_a, h_b, h_c *göra det och vice versa.* *X.*

Enligt Stewarts teorem är $\overline{AA_1}^2 = \frac{b^2(p-b) + c^2(p-c)}{a} - (p-b)(p-c)$. Om man ökar och minskar med $a^2(p-a)$ i första termens täljare samt observerar, att $a = (p-b) + (p-c)$, kan man skriva $\overline{AA_1}^2 = \frac{\Sigma a^2(p-a)}{a} - \Sigma(p-b)(p-c) = \alpha \cdot h_a + \beta$, där α och β äro *symmetriska* uttryck i sidorna. Följaktligen är med samma α och β: $BB_1^2 = \alpha h_b + \beta$, $CC_1^2 = \alpha h_c + \beta$ och härav följer satsen omedelbart. *X.*

Även löst av *Cs, J. A. Sandelin, N. G. Sjöstrand.*

1519) *Visa, att om A, B och C äro vinklar i en triangel, så gäller:*

$$\frac{1}{1 + \sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{1 + \sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{1 + \sin\frac{C}{2}} \geq 2.$$

B. Svenonius.

Funktionen $f(x) = 1 : \cos^2 x$ har positiv andra derivata i intervallet $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Enligt konvexa funktioners grundegenskap är alltså för tre x-värden i detta intervall $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) \geqq 3f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)$. (Se bl. a. Elementa, årg. *3* sid. 122). Nu är $1 + \sin\frac{x}{2} = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$, och $\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ ligger mellan 0 och $\frac{\pi}{4}$, när x betyder radiantalet för en triangelvinkel. Alltså är $\Sigma 1 : \left(1 + \sin\frac{A}{2}\right) \geqq 3 : \left(1 + \sin\frac{\pi}{6}\right)$ med likhet endast i liksidiga trianglar. *X.*

Annan lösning: Om O är den inskrivna cirkelns medelpunkt, r dess radie, är $\sin\frac{A}{2} = \frac{r}{OA}$. Betecknas vänstra ledet i olikheten (likheten) med f och bissektriserna med v_a, v_b, v_c, är $f = \frac{OA}{r + OA} + \frac{OB}{r + OB} + \frac{OC}{r + OC} \geqq \frac{OA}{v_a} + \frac{OB}{v_b} + \frac{OC}{v_c}$. Likhetstecknet gäller endast, om triangeln är liksidig, då $f = 2$. I annat fall är, då ju $\frac{OA}{v_a} = \frac{r}{l} = \frac{T}{p} : \frac{2T}{b + c} = \frac{b + c}{2p}$, om l betecknar perpendikeln från v_a:s ändpunkt mot b (eller c), $f > \frac{2(a + b + c)}{2p} = 2$. *Cs.*

Även löst av *J. A. Sandelin, N. G. Sjöstrand.*

Forts. från s. 250.

Naturens Verden, København 1947: 1—4.

Ur innehållet: A. B. Jensen, Den sibiriske Kuldepol; Sophie Petersen, Træk af det moderne Islands erhvervsgeografiske Forhold med særligt Henblik paa Naturkrafternes Udnyttelse; Elise Wesenberg-Lund, Lysende Dyr, lidt om koldt Lys; Julie M. Vinter Hansen, Kometerne i Aaret 1946.

Fra Fysikkens Verden, Oslo 1947, Årg. 9, 1947: 2.

Ur innehållet: E. A. Hylleraas, Nobelpristager i fysikk: Niels Bohr; H. Ramberg, Bemerkninger om det osmotiske trykks natur; H. Margenau, Fysikkens oprinnelse og utvikling; A. Lundby, Birmingham-synkrotronet; E. A. Hylleraas, Elektriske og elektromagnettiske akseleratorer.

Science Progress, 1947: Oct.

Ur innehållet: Photosynthesis; The molecular structure of coal; The eye as a detector of light-quantum fluctuations in vision; Electron microscopy. Recent Advances in Science; under denna rubrik ett stort antal artiklar inom skilda områden. Notiser och bokanmälningar.

Studentexamen och fyllnadsprövning efter studentexamen.

November 1947.

Matematiska uppgifter för latinlinjen.

1. Lös ekvationen $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x+4}{x-2}-\frac{9}{x-3}=0$.
2. I en konvergent oändlig geometrisk serie är första termen 4. Hur stor är kvoten, då summan av termerna fr. o. m. den tredje är 9?
3. En person placerade vid ett årsskifte 10 000 kr mot 4 % ränta på ränta. Vid varje årsskifte uttog han 25 % av den upplupna räntan för skatteändamål m. m. Återstoden kapitaliserades. Beräkna kapitalets storlek efter 10 år, sedan den vanliga uttagningen verkställts och kapitaliseringen skett, samt ange storleken av räntan för det tionde året.
4. Omkretsen av en rätvinklig triangel är 56 cm och radien i den inskrivna cirkeln 3 cm. Beräkna hypotenusan och den minsta vinkeln i triangeln.
5. Basen BC i en triangel ABC är 8 cm, och höjden AD mot basen är 6 cm. På avståndet x cm från A drages en med BC parallell transversal EF. Ange ytan av triangeln DEF som en funktion av x, upprita motsvarande kurva och ange med tillhjälp av denna eller på annat sätt maximivärdet av denna yta.
6. Med sidan BC i triangeln ABC som diameter uppritas en cirkel, som skär AB i D och AC i E. Om $AD : BD = 5 : 3$ och $AE : CE = 2 : 3$, hur stora äro vinklarna i triangeln ABC?
7. En trubbvinklig triangel, vars största sida är 246 mm, är inskriven i en cirkel med 205 mm radie. Triangelns omkrets är 504 mm. Beräkna triangelns övriga sidor.
8. AB och CD äro de båda parallella sidorna i ett parallelltrapets. Diagonalerna AC och BD äro båda 10 cm långa och skära varandra i punkten E. Ytan av triangeln ABE är 4 cm² och ytan av triangeln CDE 9 cm². Beräkna trapetsets parallella sidor i de båda fall, som äro möjliga.

Resultat: **1.** $x_1=0$; $x_2=1{,}5$; $x_3=5$. **2.** 0,75. **3.** 13 439 kr och 521,9 kr. **4.** 25 cm; 16,26°. **5.** $3y=2x(6-x)$; $y_{\max}=6$ för $x=3$. **6.** $A=60°$; $B=70{,}89°$; $C=49{,}11°$. **7.** 90 mm och 168 mm. **8.** $2(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ och $3(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ cm eller $2(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ och $3(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ cm.

Matematiska uppgifter för reallinjen.

Allmän kurs.

1. Förenkla uttrycket $(\sqrt{p})^{a-\frac{1}{b}} \cdot (\sqrt{p})^{b-\frac{1}{a}}$. Beräkna därefter dess exakta värde, om a och b äro rötterna till ekvationen $5x^2 - 24x + 30 = 0$ och $p = \sqrt[3]{5}$.
2. Lös ekvationen $\sin^3 x - \sin 3x = \cos^3 x + \cos 3x$.
3. Den räta vinkelns spets i en rätvinklig triangel ligger i punkten $(-2; -5)$ och triangelns tyngdpunkt i $(1; -2\frac{2}{3})$. Hypotenusan ligger utefter linjen $11x + 3y - 23 = 0$. Bestäm koordinaterna för triangelns övriga hörn.
4. Kring ett klot omskrives en rät cirkulär kon. Genom den cirkel, längs vilken klotet tangerar konens mantelyta, lägges ett plan. Detta delar klotet i två segment, vilkas volymer förhålla sig som 5:27. Bestäm konens toppvinkel.
5. Tre klot, som ligga på ett horisontellt bord, tangera varandra parvis utantill. Ett av kloten har hälften så stor radie som de båda andra. Ett plan lägges så, att det tangerar alla kloten. Beräkna vinkeln mellan detta plan och bordet.
6. Två räta cirkulära koner ha samma basyta och äro vända åt samma håll. Den ena konens toppvinkel är 60°, den andras 90°. Parallellt med basytan lägges ett plan, som skär båda mantelytorna så, att den cirkelring, som utskäres i planet, får största möjliga yta. Beräkna det förhållande, i vilket den mellan mantelytorna befintliga volymen delas av detta plan.
7. I triangeln ABC är vinkeln B dubbelt så stor som vinkeln C. Bissektrisen till vinkeln A skär den motstående sidan i punkten D och den kring triangeln omskrivna cirkeln i punkten E. Hur stora äro triangelns vinklar, om $AD : DE = 5 : 4$?
8. Upprita kurvan $y = 24x - 22x^2 + 8x^3 - x^4$ i dess huvuddrag. I en punkt P på kurvan drages tangenten. Undersök, hur dennas avskärning på y-axeln varierar, när P rör sig längs kurvan, och åskådliggör detta i ett särskilt diagram. Ange speciellt, för vilka x-värden den nämnda avskärningen antar maximi- eller minimivärden.

Resultat: 1. $\sqrt[3]{25}$. 2. $45^\circ + n \cdot 180^\circ$; $116{,}56^\circ + n \cdot 180^\circ$; $153{,}44^\circ + n \cdot 180^\circ$. 3. $(1; 4)$ och $(4; -7)$. 4. 60° (Det mindre segmentet är $^5/_{32}$ av klotets volym). 5. $53{,}13^\circ$. 6. $2 : \sqrt{3}$. 7. $A = 79{,}32^\circ$; $B = 67{,}12^\circ$; $C = 33{,}56^\circ$. 8. $y_{\max}$ i $(1; 9)$ och $(3; 9)$, $y_{\min}$ i $(2; 8)$. Avskärningen

$= Y = x^2(3x^2 - 16x + 22)$; $Y_{\max}$ i $\left(2 - \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{69 + 16\sqrt{3}}{9}\right)$, $Y_{\min}$ i $(0, 0)$ och $\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{69 - 16\sqrt{3}}{9}\right)$.

Matematiska uppgifter för reallinjen.

Specialkurs.

1. Visa, att funktionen $y = \sqrt[3]{\sin^2 x + \frac{1}{4}}$ satisfierar ekvationen $3y^2 \frac{dy}{dx} = \sin 2x$. Bestäm också, för vilka x-värden funktionen antar sina största och minsta värden.
2. Sidan i en kvadrat *ABCD* är 4 längdenheter. På sidan *AB* eller dess förlängning väljes en punkt *P* och på sidan *CD* eller dess förlängning en punkt *Q*, så att $AP = CQ$ och så att *P* och *Q* ligga på var sin sida om diagonalen *AC*. Sök och konstruera orten för skärningspunkten mellan sammanbindningslinjerna *DP* och *AQ*.
3. En liksidig triangel är inskriven i en ellips, så att en sida är parallell med storaxeln. Hur stor är ellipsens excentricitet, om de båda andra sidorna i triangeln äro normaler till ellipsen?
4. Två konjugatdiametrar till en hyperbel, vars axlar äro parallella med koordinataxlarna, äro $3x + 2y + 1 = 0$ och $3x + 8y - 23 = 0$. Linjen $x - 4y + 3 = 0$ tangerar hyperbeln. Sök dennas ekvation.
5. I ett koordinatsystem äro cirkeln $x^2 + y^2 = a^2$ och parabeln $x^2 + ay = a^2$ uppritade. *P* är en punkt på parabeln. Tangenten i *P* skär cirkeln i punkterna *A* och *B*. Bestäm den största längd, som kordan *AB* kan anta.
6. Konstruera kurvan $y = \frac{3x}{4} - \frac{5}{x}$. Visa därefter, att man på kurvan kan finna fyra punkter, som äro belägna i hörnen av en kvadrat. Ange punkternas koordinater och längden av kvadratens sida.
7. Två punkter på jordytan äro rörliga längs var sin meridian. De ha samma latitud, medan deras longitudskillnad är 90°. När latituden varierar, antar skillnaden mellan punkternas avstånd längs parallellcirkeln och deras avstånd längs storcirkeln genom punkterna olika värden. Bestäm den latitud, för vilken den nämnda skillnaden blir så stor som möjligt, och beräkna detta maximivärde. Jorden antas vara en sfär med radien 637 mil.

Resultat: 1. Max. för $x = \pi/2 + n \cdot \pi$; min. för $x = n \cdot \pi$. 2. En parabel, vars parameter är AD och vars vertex ligger inom kvadraten. 3. $2 : \sqrt{7}$. 4. $(x + 3)^2 : 32 - (y - 4)^2 : 18 = -1$. 5. $AB_{\max} = a$. Sök min. för parabeltangentens avstånd från cirkelns centrum eller observera, att kordans avstånd från centrum bör gå i parabelnormalens riktning; då subnormalen $= a : 2$, fås avståndet $= a\sqrt{3} : 2$. 6. Om $a = 2\sqrt{3}$ och $b = 2 : \sqrt{3}$, ligga hörnen i $(a; b)$, $(-a; -b)$, $(b; -a)$, $(-b; a)$. Kvadratens sida $= 4\sqrt{15} : 3$. 7. 52,01°; 42,2 mil.

Uppgifter i fysik.

Obs. Uppställda ekvationer böra motiveras, enheterna angivas och beteckningarna förklaras. Lösningarna till uppgifterna 2 och 5—7 böra åtföljas av enkla figurer. — Konstanter, som ej äro uppgivna i problemens text, hämtas ur formelsamlingen.

1. I en stor cylindrisk lysgasbehållare hålles gasen instängd genom ett lock, som kan förskjutas uppåt och nedåt som en gastätt tillslutande kolv. Lockets diameter är 24 m. Gastrycket regleras med hjälp av vikter, som ställas på locket. Vid ett tillfälle, då den instängda gasmassans höjd var omkring 50 m och dess tryck något över atmosfärstryck, bestegs gasbehållaren av ett studiesällskap. Hela sällskapet, 28 personer med en genomsnittsvikt av 70 kg, steg ut på locket. Hur många cm sänkte sig locket till följd av denna extra belastning? Cylinderns botten antages faststående, gastrycket lika överallt i gasmassan och belastningen jämnt fördelad över lockets yta. Vid beräkningarna kan gasmassans ursprungliga tryck med tillräcklig noggrannhet sättas lika med 1 kgf/cm² och dess ursprungliga höjd lika med 50 m. Friktionen försummas.
2. På en horisontell skiva, som kan rotera kring en vertikal axel, ligga två metallklotsar, förenade genom ett viktlöst snöre. Om skivan försiktigt sättes i gång, spänner sig snöret vid ett visst varvtal; det är då horisontellt och dess förlängning inåt går genom rotationsaxeln. Om hastigheten ytterligare ökas, blir spänningen i snöret allt större, tills slutligen klotsarna vid ett visst högre varvtal komma i glidning och slungas ut från skivan. Beräkna spänningen i snöret i detta ögonblick. Vid beräkningen antages den inre klotsens vikt vara 300 g och dess tyngdpunkts avstånd från axeln 10 cm, den yttre klotsens vikt 100 g och dess tyngdpunkts avstånd från axeln 40 cm. Friktionskoefficienten antages vara 0,2. Klotsarnas dimensioner och luftmotståndet lämnas obeaktade.
3. Specifika värmet hos en fast kropp kan bestämmas genom vägning av den vattenmängd, som kondenseras på kroppen, när

den införes i vattenånga. Kroppen upphänges i en tråd och införes i ett kärl, där den omspolas av ånga. Under kroppen är ett tunt skålformigt platinableck upphängt, vilket uppsamlar det vatten, som eventuellt droppar ned från kroppen. Vid ett tillfälle, då man som försökskropp hade en metallcylinder om 146 g jämte ett platinableck om 12 g, fann man, att det på de båda kropparna kondenserade vattnet vägde 2,11 g. Begynnelsetemperaturen var 17,4° C, vattenångans temperatur 100° C. Beräkna metallcylinderns specifika värme. Platinableckets specifika värme är 0,032 cal per g och grad; till upphängningstrådarna tages ingen hänsyn.

4. Man ville under en lektion bestämma ljudets hastighet i koldioxid genom jämförelse med hastigheten i luft, i båda fallen vid rumstemperatur. Man använde därvid en pipa och ett monokord, det senare innehållande en spänd sträng jämte två s. k. stall, vilka avgränsade den ljudande delen av strängen. Då pipan anblåstes med luft och strängen försattes i transversella svängningar, gåvo de samma ton, ifall avståndet mellan stallen var 708 mm. Anblåstes åter pipan med koldioxid, måste avståndet mellan stallen ökas till 896 mm. Försöket upprepades två gånger, varvid de båda längderna bestämdes till 711 och 893 mm, resp. 709 och 896 mm. Såväl pipan som strängen gåvo i samtliga fallen sin grundton. Beräkna av dessa mätningar ljudets hastighet i koldioxid. Hastigheten i luft antages vara 340 m/sek.

5. I en teaterkikare är objektivets brännvidd 15 cm och okularets 3,0 cm. Man inriktar kikaren mot en avlägsen punktformig ljuskälla, så att denna synes skarp i synfältets mitt. Ögat mottager då ett större ljusflöde än om samma ljuskälla betraktas med obeväpnat öga. Vad är förhållandet mellan den ljusmängd ögat mottager per tidsenhet i dessa båda fall? Pupillen är mindre än det utträdande knippets tvärsnitt och dess diameter antages vara densamma i båda fallen. Genom reflexion och absorption i kikarens linser förloras 20 % av den infallande ljusmängden.

6. Man visste, att elektromotoriska kraften för ett visst element var omkring 1 V, och ville bestämma den noggrannare genom att jämföra med ett normalelement, vars elektromotoriska kraft var 1,018 V. För ändamålet anordnades en strömkrets, bestående av en blyackumulator, ett enohmsmotstånd, ett skjutmotstånd och en milliampèremeter. Mellan ändpunkterna av enohmsmotståndet inkopplades en grenledning, som i ordning innehöll normalelementet, en galvanometer och det element, som skulle undersökas. Normalelementets positiva pol anslöts till den ända av

enohmsmotståndet, som hade högre potential och det andra elementets positiva pol till den ända, som hade lägre potential. Vid en viss inställning av skjutmotståndet blev galvanometern strömlös. Milliampèremetern visade då 15 mA. Hur stor var den sökta elektromotoriska kraften.

7. En vridspolampèremeter har mellan klämskruvarna *B* och *C* ett motstånd av 50,0 Ω och gör utslag över hela skalan för strömstyrkan 2 mA. Till instrumentet hör en shunt *BD* och ett skyddsmotstånd *CE* samt en tryckknappanordning med tre kontaktfjädrar *F*, *G* och *H*, anordnade rätt över varandra. Den översta fjädern *F* är förenad med punkten *E* och den nedersta *H* med punkten *C* på skyddsmotståndet, medan den mellanliggande *G* är förenad med punkten *D* på shunten. Vid lätt tryckning på knappen bringas *F* och *G* i kontakt med varandra; vid hårdare tryckning komma alla tre fjädrarna i kontakt. Huvudledningen, där strömstyrkan skall mätas, anslutes till punkterna *B* och *D*. När man trycker hårt på knappen, skall ampèremetern ge utslag över hela skalan för en strömstyrka av exakt 0,2 A i huvudledningen. När man trycker lättare, så att blott de båda översta fjädrarna komma i kontakt med varandra, får utslaget inte gå över hela skalan för mindre strömstyrkor i huvudledningen än 0,4 A. Hur stora böra shunten och skyddsmotståndet vara? Motståndet i fjädrarna och förbindelsetrådarna kan försummas, likaså de ändringar, strömstyrkan i huvudledningen undergår, när instrumentet inkopplas.

8. En spole med mjukjärnskärna var uppställd med axeln lodrät. Omedelbart ovanför befann sig den fria ändan av en tunn, rektangulär järnfjäder, som i andra ändan var fastklämd, så att den vid jämvikt var någorlunda horisontell med flatsidan vänd mot spolen. Genom spolen leddes en växelström, varvid fjädern kom i resonans. Man ville bestämma strömmens periodtal genom att studera fjäderns svängningar, varför man belyste den från ena sidan och iakttog den i en på andra sidan uppställd horisontell avläsningskikare. Innan belysningsknippet träffade fjädern, sammanbröts det med en lins. Vid knippets smalaste del hade man inskjutit en hålskiva, som var fastgjord på en elmotors axel. Den hade en krans av 10 hål med tämligen breda lika stora mellanrum. Ljuset hejdades av skivan utom när ett hål passerade förbi, och fjädern belystes således av 10 ljusglimtar för varje varv skivan roterade. Om fjädern mellan två på varandra följande ljusglimtar just hunnit fullborda ett helt antal svängningar, syntes den för observatören stillastående. Detta inträffade, när motorns hastighet var 486 varv/minut. Om

motorns hastighet minskades, inträffade det nästa gång, när hastigheten var 324 varv/min. Vilket var växelströmmens periodtal?

Resultat: 1. 2,2 cm. 2. $25\,{}^{5}/_{7}$ gf. 3. 0,0917 cal/g·grad. 4. 269 m/s. 5. 20 ggr så mycket vid beväpnat öga. 6. 1,003 V. 7. Shunt och skyddsmotst. resp. 0,505 och 50,5 Ω. 8. 81 p/s (fjäderns svängningstal = 162).

Realexamen H. T. 1947.

Provräkning.

1. Lös ekvationen $\dfrac{1}{x-x^2}-\dfrac{2}{x+x^2}-\dfrac{x}{1-x^2}-\dfrac{1}{x}=0.$
2. Från ett bageri säljes knäckebröd för 1 kr 10 öre per kg. Mjölet köpes för 36 kr per säck om 100 kg. Om man måste räkna med att 20 % av det använda mjölet förloras vid bakningen, hur många procents pålägg kan man då säga, att bageriet beräknat? Till övriga i brödet ingående beståndsdelar tages ingen hänsyn.
3. En skridskoåkare och en cyklist starta samtidigt på en isbana. Den förre tillryggalägger 1000 m på $1\frac{1}{2}$ min, och den senares hastighet är 45 km/tim. Hur stort är avståndet mellan dem, då den snabbare tillryggalagt 1 km?
4. Vid ett årsskifte placerade en person ett arv på 20 000 kr så, att han köpte 10 st 3,5 % obligationer à nominellt 1000 kr till 104 % kurs och 15 st aktier för 320 kr per st, varjämte han insatte återstoden i en bank, som lämnade $2\frac{1}{2}$ % ränta. Utdelningen på aktierna blev under året 22 kr per aktie. Hur många procents avkastning erhöll han första året på sitt arv?
5. Framhjulen på en lastbil äro 24 tum och bakhjulen 26 tum i diameter. Hur långt har bilen gått, då ett framhjul rullat ett varv mer än ett bakhjul? 1 tum = 2,5 cm. $\pi = 3{,}14$.
6. En vinkel i en triangel är 105°. Höjden från denna vinkels spets är 8 cm, och den delar vinkeln i förhållandet 3 : 4. Beräkna triangelns omkrets.
7. Ett villatak har formen av två rektanglar, vardera med sidorna 15 m och 8 m. Kortsidorna luta 45° mot horisontalplanet, långsidorna äro horisontella. Medelst takrännor och stuprör ledes allt regnvatten, som faller på taket, ned i två lika stora cylindriska tunnor, vilkas bottendiameter och höjd invändigt äro 8 dm respektive 9,5 dm. Under en regnskur föll just så mycket regn, att de förut tomma tunnorna fylldes. Hur många mm regn hade fallit, om man antar, att regndropparna föllo lodrätt? $\pi = 3{,}14$.

8. I en likbent triangel *ABC* är basen *BC* 5 cm. Från hörnet *B* drages en rät linje, vilken med sidan *BC* bildar en vinkel, som är lika stor som vinkeln *A*. Denna linje skär sidan *AC* i punkten *D*. Beräkna ytan av triangeln *ABC*, om denna yta är fyra gånger så stor som ytan av triangeln *BCD*.

Resultat: **1.** $x = {}^{2}/_{3}$. **2.** 144,4 %. **3.** Cyklisten är $^{1}/_{9}$ km före. **4.** 4 %. **5.** 24,5 m. **6.** $24 + \sqrt{192} + \sqrt{128} = 49{,}17$ cm. **7.** $\pi \cdot \sqrt{722} : 15 = 5{,}6$ mm. **8.** $5\sqrt{375} : 4 = 24{,}2$ cm^2.

Uppgifter i fysik för tekniska linjen.

Obs. Lösningarna till uppgifterna nr 2 och 8 böra vara försedda med enkla figurer.

1. En flottör, som skall användas i en apparat med vatten, består av ett skal av kopparplåt, som väger 94 g. När flottören flyter ensam för sig, skall en fjärdedel av dess volym ligga ovanför vattenytan. Hur stor vikt bör då före igenlödningen placeras inuti flottören, om flottörens hela yttervolym är 280 cm^3?
2. En s. k. Papins gryta skall förses med en säkerhetsventil. I locket, vilket som vanligt är fastskruvat vid grytan, uppborras ett hål med genomskärningsytan 3,2 cm^2. Hålet slutes av en ventil, som hålles nedtryckt med hjälp av en jämntjock vågrät hävstång av längden 30 cm och vikten 320 g. Stången är rörlig kring sin ena ända. Avståndet från denna ända till den punkt, där stången vilar mot ventilen, är 6,0 cm. En vikt på 3,0 kg är upphängd 4,4 cm från stångens fria ända. Hur många atmosfärers övertryck kan ventilen uthärda? Ventilens vikt lämnas ur räkningen. 1 at = 1 kgf/cm^2.
3. En mindre, fyrhjulig motorvagn, som väger 5 ton, går på en horisontell bana. I ett visst ögonblick, då vagnens hastighet är 36 km/tim, frånkopplas motorn, och vagnen bromsas. Vid periferien av varje hjul sitter en klots, och bromsningen tillgår så, att klotsarna på en gång pressas mot hjulen. Friktionskoefficienten mellan hjulen och klotsarna är 0,4, och man kan antaga, att den kraft, som pressar en klots mot hjulet, är riktad mot hjulets medelpunkt och lika stor på alla fyra ställena. Hur stor måste kraften på varje klots vara, för att vagnen skall stanna på en sträcka av 50 m? Inga andra retarderande krafter än bromskraften medtagas vid beräkningen. $g = 9{,}8$ m/sek^2?
4. För att bestämma isens smältvärme gick man en gång tillväga på följande sätt. En ganska stor bägare fylldes till något mer än hälften med smältande isbitar. Efter en stund, när bägaren

antagit isens temperatur, avhälldes smältvattnet så noggrant som möjligt, och 325 g vatten av 35,5° C slogs i bägaren. Efter noggrann omrörning, då en i bägaren nedförd termometer visade 0° C, hälldes allt vatten ut ur bägaren, varvid man noga tillsåg, att inga isbitar medföljde. Det nu avhällda vattnet vägde 474 g. Vilket värde på isens smältvärme erhöll man? Värmeutbytet med omgivningen försummades.

5. En torr luftström stiger uppåt från jordytan. Vid marken är lufttrycket 775 mm kvicksilver och temperaturen + 17° C. Lufttrycket avtager 1 mm vid 11 m stigning, och temperaturen avtager 1° vid 100 m stigning. Beräkna volymen på 1100 m höjd av en luftmassa, som vid jordytan hade volymen 1 m^3. Luftens temperaturkoefficient är 1/273.
6. Ett batteri, som består av 35 seriekopplade blyackumulatorer, skall laddas från belysningsnätet. Batteriet kopplas i serie med ett lagom stort skjutmotstånd, spänningen pålägges, och skjutmotståndet regleras, så att laddningsströmmen får den önskade strömstyrkan, 4,0 A. Under laddningens gång stiger elektromotoriska kraften för varje ackumulator från 2,1 till 2,7 V. Hur mycket måste skjutmotståndet samtidigt minskas, om strömstyrkan skall vara oförändrad?
7. Från axeln av en elmotor, vars verkningsgrad är 80 %, uttages en effekt av 6 hästkrafter. Vad kostar det att driva denna motor under 8 timmar vid ett energipris av 5 öre per kWh? 1 hk = 736 W.
8. I en elektrisk ugn finnas två motstånd *A* och *B*. Kopplas endast *A* till ledningsnätet, där spänningen är 110 V, blir den i ugnen utvecklade effekten 220 W. Om endast *B* inkopplas, blir effekten 440 W. Man önskar, att den i ugnen utvecklade effekten vid ett tillfälle skall vara 495 W. Då användas båda motstånden. *B* kopplas direkt till nätet, *A* kopplas till nätet i serie med ett utanför ugnen beläget motstånd. Hur stort skall detta tagas? Motstånden få antagas oberoende av temperaturen.

Resultat: 1. 116 g. 2. 4,25 at. 3. 319 kgf. 4. 77,4 cal/g. 5. 1,10 m^3. 6. 5,25 Ω. 7. 2,21 kr. 8. 55 Ω.

Uppgifter i beskrivande maskin- och byggnadslära för tekniska linjen.

1. Axelavståndet mellan två samarbetande kugghjul med modul 8 är 320 mm. Utväxlingen är 1 : 3. Beräkna hjulens kuggantal, delningsdiametrar, ytterdiametrar och fräsdjup.

2. Spindeln till ett maskinskruvstycke har en enkel plattgänga med stigningen 6 mm och ytterdiametern 24 mm. Vevradien är 175 mm. Hur stor vridspänning kan uppkomma i spindelns kärna, om kraften i veven vid inspänningen är 15 kg?
3. Ett kuggdrev, som matar ned kuggstången på spindeln till en borrmaskin, har modulen 4 mm och kuggantalet 18. Matningsspaken är 300 mm lång och påverkas vid ytterändan av en tangentiell kraft på 5 kg. Beräkna trycket mellan arbetsstycket och borrspetsen.
4. En bensinmotor har cylinderdiametern 89 mm och tändningstrycket 22 kg/cm^2. Vevstaken är 250 mm lång och dess minsta tröghetsmoment är 0,35 cm^4. Beräkna säkerheten mot avknäckning, om materialets elasticitetsmodul är 12500 kg/mm^2.
5. De båda kopplingshalvorna i en skivkoppling äro fastsatta på den 35 mm tjocka axeln med 68 mm långa i axel och nav försänkta standardkilar med rektangulärt tvärsnitt. Hur stor blir skjuvspänningen i kilarna, då en axeleffekt av 15 hk överföres vid 900 varv per minut?
6. En mindre bro, 10 meter lång, består av tre bredvid varandra liggande I-balkar med 1 m delning. Körbanan skjuter ut $^1/_2$ m på var sida om de yttersta balkarna. Vid provning av brons hållfasthet har man inte möjlighet att prova den med jämnt fördelad last utan endast med en koncentrerad last placerad mitt på bron. Hur stor skall denna last vara för att ge en maximal påkänning motsvarande en jämnt fördelad belastning på 500 kg/m^2?
7. Jämför bärförmågan vid jämnt fördelad belastning hos en 8 m lång vid ändarna fritt upplagd I-balk NP 18 med bärförmågan hos en lika lång på samma sätt upplagd U-balk med samma profilnummer. Tillåten böjpåkänning är 1200 kg/cm^2. Vid beräkningarna tages hänsyn till balkarnas egenvikter.
8. Redogör för kondensorns uppgift vid ångkraftanläggningar.

Resultat: 1. *a*) 20 och 60 kuggar, *b*) 160 och 480 mm, *c*) 176 och 496 mm, *d*) 17,3 mm. 2. 229 kp/cm^2. 3. 41,7 kp. 4. 5-faldig. 5. 100 kp/cm^2. 6. 2,5 ton per balk. 7. 1764 resp. 1624 kg.

Trettionde årgångens innehåll.

1947.

Sid.

Ajger, R. Ekoradio ... 91

Axner, Y. Anm. av J. Barton Hoag, Electron and Nuclear Physics 57

Blom, G. Anm. av H. Cramér, Mathematical Methods of Statistics (54), Fletcher-Miller-Rosenhead, An Index of Mathematical Tables (113), P. G. Hoel, Introduction to Mathematical Statistics (114), M. G. Kendall, The Advanced Theory of Statistics (186), Intermédiaire des Recherches Mathématiques (187), A. Wald, Sequential Analysis (241).

Broman, A. On Two Classes of Trigonometrical Series (Ref. av gradualavh.) ... 197

Bäckström, H. Anm. av W. Clark, Photography by Infrared ... 58

Carlbom, L. Anm. av Wilson-Nier-Reimann, Preparation and Measurement of Isotopic Tracers ... 60

Cederstrand, S. Centripetalaccelerationen vid likformig rotation .. 104

Comét, S. Anm. av P. Dubreil, Algèbre I (236), L. Brand, Vector and Tensor Analysis (237), A. D. Michal, Matrix and Tensor Calculus (238), R. Nyhlén, Lärobok i geometri, Förberedande kurs i geometri, Tilläggskurs i geometri (239).

Djurfeldt, R. m. fl. Om användningen av jonbytande ämnen i den analytiska kemien ... 107

Elfving, G. Det matematiska sannolikhetsbegreppet ... 19

—— Matematisk statistik — problem, metoder och tillämpningar .. 209

Englund, B. Anm. av A. E. Bell, Modern Practical Chemistry ... 194

Eriksson, H. Bestämning av luftens syrehalt vid kemiundervisningen i realskolan ... 41

von Friesen, S. Anm. av M. H. Pirenne, The Diffraction of X-Rays and Electrons by Free Molecules ... 115

Grundström, B. Anm. av O. Berg, Engelska och amerikanska mätinstrument (63), Ingenjörshandboken (118), F. Michaud, Problèmes de physique avec solutions expliquées (189), O. Berg, European Instruments (190).

Gustaver, B. Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning. Årsmötet i Stockholm i jan. 1947. Referat av föredrag om »Problemen till handelsräkning i realskolan» och »Fysik- och kemiundervisningen i Finland» samt av diskussion om »Lärarutbildningen i matematik, fysik och kemi». Styrelseberättelse för 1946 44

Hellsten, U. Determination of the Denominator of Fredholm in Some Types of Integral Equations (Ref. av gradualavh.) 196

Henrikson, H. Anm. av A. Ångström, Sveriges klimat 119

Hilding, S. Anm. av J. M. Hyslop, Infinite Series (56), A. Broman, Kompendium i tillämpad matematik (112), G. Julia, Cours de géométrie (186).

Hulthén, L. Anm. av H. Jeffreys-Bertha Jeffreys, Methods of Mathematical Physics 188

Hägg, G. Anm. av C. W. Bunn, Chemical Crystallography. An Introduction to Optical and X-Ray Methods 116

Ingelstam, E. Anm. av E. Bauer, La mesure des grandeurs; dimensions et unités (190), G.-A. Boutry, Optique instrumentale (190).

Jenvall, A. Anm. av E. A. Beet, Elementary Astronomy 191

Johnsson, H. Termisk-hydrologiska studier i sjön Klämmingen (Ref. av gradualavh.) 126

Junell, R. Anm. av H. T. Openshaw, A Laboratory Manual of Qualitative Organic Analysis 194

Juringius, N. Bevis för en tetraedersats 16

Jönsson, T. Ett par nyare jonisationsvakuummetrar 34

—— Magnetronrören ur fysikalisk synpunkt 169

—— Anm. av MIT Radar School, Principles of Radar (66), J. D. Heldman, Techniques of Glass Manipulation in Scientific Research (66), R. I. Sarbacher-W. A. Edson, Hyper and Ultra-High Frequency Engineering (117), J. C. Slater, Microwave Transmission (117), L. de Forest, Television Now and Onwards (242), W. C. Eddy, Television (242), K. S. Tyler, Telcasting and Color (242), J. Mills, Electronics (243), D. McNicol, Radio's Conquest of Space (243), O. E. Dunlap, Radar (243), R. G. Hudson, An Introduction to Electronics (243), P. Wessel, Physik (245).

Kjellberg, G. Anm. av G. Valiron, Équations fonctionelles 238

Levring, T. Anm. av M. J. Duclaux, Physique colloïdale et biologie, Chimie colloïdale et biologie (124), P. Chouard, m. fl., Les idées modernes sur le mécanisme de la photosynthèse (193).

Linde, J. O. Nobelpriset i fysik 1946 9

Lindholm, E. Anm. av N. G. Parke III, Guide to the Literature of Mathematics and Physics (237), R. M. Sutton, Demonstration Experiments in Physics (244).
Melander, L. Anm. av Madame Joliot-Curie, Les radioéléments naturels 192
Myrbäck, K. Nobelprisen i kemi 1946 1
Nordefeldt, E. Anm. av I. Bolin-B. Gustaver, Att laborera hemma I (191), A. E. Remick, Electronic Interpretations of Organic Chemistry (195), R. Macy, Organic Chemistry Simplified (249), Fernelius-Garret-Quill, Fundamentals in Chemistry for the Laboratory (249).
Nordhult, A. De högre tekniska läroverken i Sverige 164
Ryde, N. Anm. av Kosmos bd 24 62
Samuelson, O. m. fl. Om användningen av jonbytande ämnen i den analytiska kemien 107
Sanner, V. H. Anm. av B. L. Worsnop-F. C. Chalklin, X-Rays 117
Schmidt, E. Nya Mersennes tal 89
Scholander, A. m. fl. Om användningen av jonbytande ämnen i den analytiska kemien 107
—— Anm. av H. Flood, Kjemi, riss av kjemien og dens anknytning til teknikk og industri 248
Setterberg, T. A Spectrophotometric Investigation of Molecular Bands of CN and CH in Stars of Late Spectral Types (Ref. av gradualavh.) 128
Sillén, L. G. Anm. av E. Darmois, Progrès récents dans l'étude de la structure des solutions électrolytiques (123), J. Guéron, Réactions bimoleculaires I (247).
Starck, G. Om lösligheter med negativ temperaturkoefficient 105
—— Om ph-indikatorer i skolan 157
—— Syror och baser II 226
—— Anm. av L. de Broglie m. fl., Le Méson, aspects théoriques et expérimentaux (61), L. Wertenstein, Radioactivité (65), Milda Prytz-Th. Østerud, Uorganisk kjemi (122), M. Haïssinsky, Electrochimie des substances radioactives et des solutions extrêmements diluées (124), M. Prettre, Réactions en chaines (125), T. Philipson, Preparativ oorganisk kemi (245), E. Darmois, L'Activité des solutions électrolytiques (250).
Stenström, O. Anm. av F. Carlson, Lärobok i geometri II 184
Stenvinkel, G. Anm. av Kurs i vakuumteknik 121
Svartholm, N. Matrisräkningens användning inom teorien för elektriska fyrpoler 145
—— Anm. av N. Bohr, Quantum d'action et noyaux atomiques (56), G. Ribaud, Constantes thermodynamiques des gaz aux

températures élevées (56), A. S. Eddington, Fundamental Theory (188).
TANDBERG, J. Anm. av A. Wood, The Cavendish Laboratory (56), A. W. Porter, The Method of Dimensions (57), Kurs i kärnfysik (64), R. Belcher-A. L. Godbert, Semi-Micro Quantitative Organic Analysis (65), W. C. Dampier, A Shorter History of Science (125), F. Sherwood Taylor, Science Past and Present (125), Bonniers Konversationslexikon, bd XII (126).
UHLER, A. † Anm. av Festskrift till N. E. Nørlund 112
WAHLGREN, A. Faktorer till talen $a^p \pm 1$ 81
WESTÖÖ, R. och ÖSTERLÖF, J. Spår av α-partiklar i fotografisk emulsion 162
Meddelande från red. till läsekretsen 43
Notis om nydöpta grundämnen 18
En översättningsfråga: »The Core of an Atom» 90
Gradualavhandlingar (autoreferat): A. BROMAN (197), U. HELLSTEN (196), O. H. JOHNSSON (126), T. SETTERBERG (128).
Problemavdelning: Matematiska uppgifter (red. av S. BÅGMAN) 68, 130, 199, 251
Matematiska och fysikaliska uppgifter vid studentskrivningarna och fyllnadsprövningarna under 1947: jan. (73), mars—april (133), aug.—sept. (202), nov. (255).
Provräkning i realexamen v.t. och h.t. 1947 .... 139, 261
Praktisk realexamen: Uppg. i fysik v.t. och h.t. 1947 .... 142, 262
» » : Uppg. i beskrivande maskin- och byggnadslära v.t. och h.t. 1947 .... 142, 263
Föredrag under hösten 1946 inom svenska matematiska, fysiska och kemiska föreningar 67
Tidskrifter, innehållsöversikt 79, 144, 198, 250, 254
Bokanmälningar: CRAMÉR, Mathematical Methods of Statistics; BOHR, Quantum d'action et noyaux atomiques; RIBAUD, Constantes thermodynamiques des gaz aux températures élevées; HYSLOP, Infinite Series; WOOD, The Cavendish Laboratory; PORTER, The Method of Dimensions; HOAG, Electron and Nuclear Physics; CLARK, Photography by Infrared; WILSON-NIER-REIMANN, Preparation and Measurement of Isotopic Tracers; DE BROGLIE, Le Méson, Aspects théoriques et expérimentaux; Kosmos bd 24; BERG, Engelska och amerikanska mätinstrument; Kurs i kärnfysik; BELCHER-GODBERT, Semi-Micro Quantitative Organic Analysis; WERTENSTEIN, Radioactivité; MIT RADAR SCHOOL, Principles of Radar; HELDMAN, Techniques of Glass Manipulation in Scientific Research 54

Festskrift till N. E. Nørlund; Broman, Kompendium i tillämpad matematik; Fletcher-Miller-Rosenhead, An Index of Mathematical Tables; Hoel, Introduction to Mathematical Statistics; Pirenne, The Diffraction of X-Rays and Electrons by Free Molecules; Bunn, Chemical Crystallography; Worsnop-Chalklin, X-Rays; Sarbacher-Edson, Hyper and Ultra-High Frequency Engineering; Slater, Microwave Transmission; Ingenjörshandboken; Ångström, Sveriges klimat; Kurs i vakuumteknik; Prytz-Østerud, Uorganisk kjemi; Darmois, Progrès récents dans l'étude de la structure des solutions électrolytiques; Haïssinsky, Electrochimie des substances radioactives et des solutions extrêmement diluées; Duclaux, Physique colloïdale et biologie, Chimie colloïdale et biologie; Prettre, Réactions en chaines; Dampier, A Shorter History of Science; Taylor, Science Past and Present; Bonniers Konversationslexikon 112

Carlson, Lärobok i geometri II; Julia, Cours de Géométrie; Kendall, The Advanced Theory of Statistics; Intermédiaire des Recherches Mathématiques; Jeffreys, Methods of Mathematical Physics; Eddington, Fundamental Theory; Michaud, Problèmes de Physique; Bauer, La Mesure des Grandeurs; Boutry, Optique Instrumentale; Berg, European Instruments; Beet, Elementary Astronomy; Bolin-Gustaver, Att laborera hemma I; Madame Joliot-Curie, Les Radioéléments Naturels; Chouard m. fl., Les Idées Modernes sur le Mécanisme de la Photosynthèse; Oppenshaw, Laboratory Manual of Qualitative Organic Analysis; Bell, Modern Practical Chemistry; Remick, Electronic Interpretations of Organic Chemistry 184

Dubreil, Algèbre; Parke, Guide to the Literature of Mathematics and Physics; Brand, Vector and Tensor Analysis; Michal, Matrix and Tensor Calculus; Valiron, Équations fonctionelles; Nyhlén, Lärobok i geometri, Förberedande kurs i geometri, Tilläggskurs i geometri; Wald, Sequential Analysis; de Forest, Television Now and Onwards; Eddy, Television; Tyler, Telecasting and Color; Mills, Electronics; McNicol, Radio's Conquest of Space; Dunlap, Radar; Hudson, An Introduction to Electronics; Sutton, Demonstration Experiments in Physics; Wessel, Physik; Philipson, Preparativ oorganisk kemi; Guéron, Réactions bimoleculaires; Flood, Kjemi; Macy, Organic Chemistry Simplified; Fernelius-Garrett-Quill, Fundamentals in Chemistry for Laboratory; Darmois, L'Activité des solutions électrolytiques 236

Nyheter i matematik, fysik och kemi

Ragnar Nyhlén

Förberedande kurs i geometri

För klasserna 2^5 och 1^4 i realskola och kommunal mellanskola.
Kr 0: 75, lärarex. kr 0: 40

Lärobok i geometri

För realskolor och därmed jämförliga läroanstalter.
Kr 2: —, lärarex. kr 1: —

Tilläggskurs i geometri

För realgymnasiets första ring. Kr 0: 90, lärarex. kr 0: 45

Samtliga tre uppförda på Statens läroboksnämnds förteckning

Vinkeltransportörerna, som omnämnas i Nyhléns Lärobok i geometri, tillhandahållas av Norstedts Skolmaterielavdelning, Stockholm. Prisuppgift på begäran.

B. Wahlström

Uppgifter i fysik

givna i studentexamen Vt 1926—Vt 1947. Urval med svar och anvisningar. Pprb. kr 1: 70, lärarex. 0: 85

Georg Böös och John Lundberg

Lärobok i kemi för gymnasiet

Sjätte, omarbetade upplagan. Med 113 illustrationer.
Inb. kr 6: —, lärarex. kr 3: —

Godkänd av Statens läroboksnämnd

Rekvirera vår stora bokkatalog, som erhålles gratis på begäran.

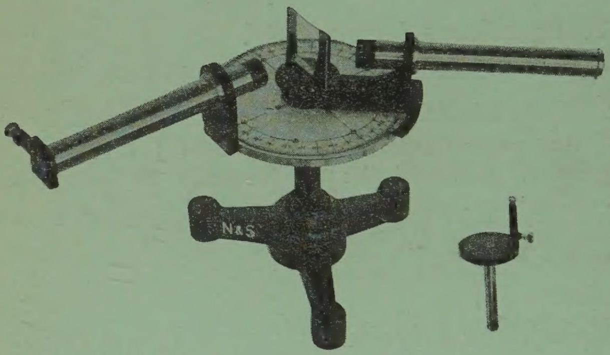
SVENSKA BOKFÖRLAGET

Drottninggatan 20 STOCKHOLM Postgiro 3994

FYSIKALISKA APPARATER

från

NORSTEDTS VERKSTAD



SPEKTROMETER

Leverans omgående från lager

P. A. NORSTEDT & SÖNER

Skolavdelningen Stockholm

Håkan Ohlssons Boktryckeri, Lund 1947.